# COURS DE MATHÉMATIQUES

## Première S

Valère BONNET (valere.bonnet@gmail.com)

10 juin 2009

Lycée PONTUS DE TYARD
13 rue des Gaillardons
71100 CHALON SUR SAÔNE
Tél. : (33) 03 85 46 85 40
Fax : (33) 03 85 46 85 59
FRANCE

# Table des matières

**Table des matières** 3

**I Généralités sur les fonctions** 7
I.1 Générailités sur les fonctions . . . 7
I.1.1 Égalité de deux fonctions . . . 7
I.1.2 Opérations sur les fonctions . . . 7
I.1.3 Compositions de fonctions . . . 8
I.1.4 Sens de variation . . . 8
I.1.5 Exercices . . . 10
I.2 Vocabulaire de l'ordre dans $\mathbb{R}$ . . . 11
I.2.1 Exercices . . . 11
I.3 Parité, périodicité . . . 11
I.3.1 Symétrie d'une partie de $\mathbb{R}$ par rapport à 0 . . . 12
I.3.2 Fonctions paires, fonctions impaires . . . 12
I.3.3 Fonctions périodiques . . . 13
I.3.4 Exercices . . . 14
I.4 Éléments de symétries d'une courbe . . . 15
I.4.1 Symétries dans $\mathbb{R}$ . . . 15
I.4.2 Axe de symétrie d'une courbe . . . 15
I.4.3 Centre de symétrie d'une courbe . . . 17
I.4.4 Exercices . . . 18
I.5 Expressions analytiques de quelques transformations . . . 19
I.5.1 Expression analytique d'une translation . . . 19
I.5.2 Expression analytique de la symétrie par rapport à la première bissectrice . . . 19
I.5.3 Quelques expressions analytiques . . . 20
I.5.4 Exercice résolu . . . 20
I.5.5 Exercices . . . 21
I.6 Fonctions associées . . . 21
I.6.1 Principaux cas . . . 21
I.6.2 Exercices résolus . . . 21

**II Polynômes** 25
II.1 Généralités . . . 25
II.1.1 Travaux dirigés . . . 27
II.1.2 Exercices . . . 28
II.2 Polynômes du second degré . . . 28
II.2.1 Forme canonique . . . 28
II.2.2 Représentation graphique et sens de variation . . . 29
II.2.3 Factorisation et résolution d'équations . . . 29
II.2.4 Signe d'un trinôme . . . 32
II.2.5 Tableau récapitulatif . . . 33
II.2.6 Travaux dirigés . . . 33
II.2.7 Exercices . . . 34
II.3 Exercices résolus . . . 34

**III Repérage** **39**
III.1 Repères cartésiens . . . 39
III.1.1 Repère d'une droite . . . 39
III.2 Le radian . . . 39
III.2.1 Définition . . . 39
III.2.2 Conversion . . . 39
III.2.3 Longueur d'un arc de cercle . . . 40
III.2.4 Exercices . . . 40
III.3 Angles orientés . . . 40
III.3.1 Orientation du plan . . . 40
III.3.2 Introduction . . . 41
III.3.3 Image d'un nombre réel sur le cercle trigonométrique . . . 42
III.3.4 Mesures d'un angles orienté . . . 43
III.3.5 Somme de deux angles orientés . . . 46
III.3.6 Exercices . . . 48
III.4 Applications de la somme deux angles . . . 48
III.4.1 Angles associés . . . 48
III.4.2 Formules de symétries . . . 49
III.4.3 Étude des fonctions sinus et cosinus . . . 50
III.4.4 Coordonnées polaires . . . 51
III.4.5 Formules d'addition . . . 52
III.4.6 Formules de duplication et linéarisation . . . 52
III.5 Compléments . . . 52
III.5.1 Formules de trigonométrie avec tan . . . 53
III.5.2 Quelques théorèmes sur les angles orientés . . . 53
III.5.3 Sommes différences et produits de fonction circulaires . . . 53
III.5.4 Équations trigonométriques . . . 54
III.5.5 Exercices . . . 57

**IV Calcul de dérivées et applications** **59**
IV.1 Notions préliminaires . . . 59
IV.1.1 Accroissement moyen . . . 59
IV.1.2 Limite finie en $a$ . . . 60
IV.1.3 Vocabulaire des approximations . . . 61
IV.1.4 Exercices . . . 62
IV.2 Introduction . . . 62
IV.2.1 Nombre dérivé, tangente . . . 62
IV.2.2 Fonction dérivée . . . 63
IV.2.3 Exercices . . . 64
IV.3 Calcul de dérivées . . . 64
IV.3.1 Classification des principales fonctions usuelles . . . 64
IV.3.2 Formules de base . . . 65
IV.3.3 Exercices . . . 66
IV.4 Applications . . . 67
IV.4.1 Sens de variation et signe de la dérivée . . . 67
IV.4.2 Extremum local . . . 67
IV.4.3 Étude de fonction et représentation graphique . . . 68
IV.4.4 Démonstration d'inégalités . . . 70

**V Produit scalaire** **71**
V.1 Introduction . . . 71
V.1.1 Rappels . . . 71
V.1.2 Définitions . . . 71
V.2 Propriétés . . . 73
V.2.1 Propriétés fondamentales . . . 73
V.2.2 Autres propriétés . . . 74
V.3 Applications du produit scalaire . . . 76
V.3.1 Équation d'une droite de vecteur normal n . . . 76
V.3.2 Déterminations d'un cercle . . . 77
V.3.3 Géométrie du triangle . . . 78

**VI Barycentre** **81**
VI.1 Barycentre . . . 81
VI.1.1 Introduction . . . 81
VI.1.2 Activités . . . 81
VI.1.3 Définition et propriétés . . . 82
VI.1.4 Propriétés . . . 84
VI.1.5 Exercices . . . 86

**VII Suites numériques** **87**
VII.1 Vocabulaire de l'ordre dans $\mathbb{R}$ . . . 87
VII.1.1 Majorants, minorants . . . 87
VII.1.2 Théorème de la borne supérieure (complément) . . . 87
VII.2 Définitions . . . 88
VII.2.1 Introduction . . . 88
VII.2.2 Composée d'une suite par une fonction . . . 88
VII.3 Représentation graphique d'une suite . . . 88
VII.3.1 Représentation graphique d'une suite définie explicitement . . . 88
VII.3.2 Représentation graphique d'une suite définie par récurrence . . . 89
VII.4 Suites bornées . . . 89
VII.5 Suites monotones . . . 90
VII.5.1 Définitions . . . 90
VII.5.2 Méthodes d'étude du sens de variation d'une suite . . . 90
VII.6 Suites arithmétiques - suites géométriques . . . 92
VII.6.1 Suites arithmétiques . . . 92
VII.6.2 Suites géométriques . . . 94
VII.6.3 Exercices résolus . . . 96
VII.7 Limites de suites . . . 97
VII.7.1 Limite finie, limite infinie . . . 97
VII.7.2 Théorèmes de comparaisons . . . 99
VII.7.3 Calcul algébrique de limites . . . 100
VII.7.4 Limites de suites géométriques . . . 103
VII.7.5 Exercices . . . 103
VII.8 Exercices . . . 104

**VIII Calcul des probabilités** **105**
VIII.1 Calculs de probabilités . . . 105
VIII.1.1 Vocabulaire des événements . . . 105
VIII.1.2 Probabilité d'un événement . . . 106
VIII.2 Variable aléatoire . . . 108
VIII.2.1 Introduction . . . 108
VIII.2.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire . . . 109
VIII.2.3 Caractéristiques d'une variable aléatoire . . . 109

**IX Translations et homothéties** **113**
IX.1 Introduction . . . 113
IX.1.1 Définitions . . . 113
IX.1.2 Propriétés caractéristiques . . . 114
IX.1.3 Compositions de translations et d'homothéties . . . 115
IX.2 Action sur certains objets géométriques . . . 116
IX.3 Image de configurations . . . 118

**Index** **120**

# Chapitre I

# Généralités sur les fonctions

## I.1 Générailités sur les fonctions

On ne traitera ici que de fonctions d'une partie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. De telles fonctions sont déterminées par leur ensemble de départ (parfois implicite) et par le mécanisme qui à un élément $x$ associe son image par la fonction.

### I.1.1 Égalité de deux fonctions

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la définition d'une fonction numérique à variable réelle.

**THÉORÈME I.1.1**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions d'ensembles de définitions respectifs $D_f$ et $D_g$.
Les fonctions $f$ et $g$ sont égales si, et seulement si :

$$D_f = D_g \qquad \text{et,} \qquad \text{pour tout } x \in D_f, \quad f(x) = g(x).$$

***Remarque*** *En particulier deux fonctions sont égales si, et seulement si, leurs représentations graphiques relativement à un repère donné sont confondues.*

***Exercice I.1.1.*** ***Démontrer que les fonctions $f$ et $g$ définies par les expressions ci-dessous sont égales.***

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$$

***Solution***

***1.*** *Pour tout réel $x$, $f(x)$ et $g(x)$ ne sont définis que lorsque $x \neq -2$, on en déduit que $f$ et $g$ ont le même ensemble de définition : $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.*

***2.*** *Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, on a :*

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+2} = \frac{2(x+2)-1}{x+2} = 2 - \frac{1}{x+2} = g(x).$$

*Donc : $f = g$.* □

### I.1.2 Opérations sur les fonctions

$f$ et $g$ sont deux fonctions ayant le même ensemble de définition D.

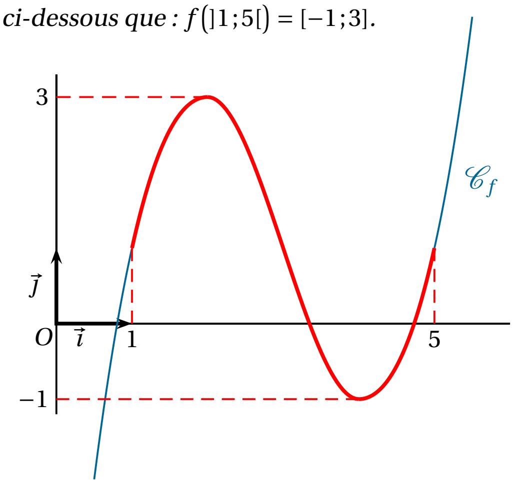
| Opération | Notation | Fonction définie, pour tout $x \in D$, par : |
|---|---|---|
| Produit par un réel $\lambda$ | $\lambda f$ | $(\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$ |
| Somme de fonctions | $f+g$ | $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ |
| Combinaison linéaire (avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$) | $\alpha f + \beta g$ | $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \times f(x) + \beta \times g(x)$ |
| Inverse d'une fonction (lorsque $f$ ne s'annule pas sur D) | $\frac{1}{f}$ | $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$ |
| Quotient de deux fonctions (lorsque $g$ ne s'annule pas sur D) | $\frac{f}{g}$ | $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ |

### I.1.3 Compositions de fonctions

Soit $f$ une fonction et I un sous-ensemble de son ensemble de définition, on désignera par $f(\mathrm{I})$ l'ensemble décrit par $f(x)$ lorsque $x$ décrit I :

$$f(\mathrm{I}) = \left\{ f(x) \mid x \in \mathrm{I} \right\}.$$

***Exemple*** *On lit sur le graphique ci-dessous que :* $f\left(]1\,;5[\right) = [-1\,;3]$.




**DÉFINITION I.1.1 COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS**

Soit $f$ une fontion définie sur un ensemble I et $g$ une fontion définie sur un ensemble J tel que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. On appelle fonction composée de $f$ par $g$ (ou composée des fonctions $f$ et $g$) la fonction, notée $g \circ f$, définie sur I par :

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big).$$

***Remarque*** *La construction de l'image d'un réel $x$ par $g \circ f$ respecte le schéma ci-dessous.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I} \arrow[r] & \mathrm{J} \arrow[r] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "\boxed{g \circ f}"'] & y = f(x) \arrow[r, mapsto, "g"] & g(y) = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x) \end{tikzcd}$$

***Exercice I.1.2.*** ***On considère les fonctions $f : x \mapsto 2x - 3$ et $g : x \mapsto x^2 + 1$.***
***Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.***

***Solution*** *$f$ et $g$ sont définies sur $\mathbb{R}$, donc $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$ :*

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x-3) = (2x-3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10.$$

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(x^2+1\right) = 2\left(x^2+1\right) + 3 = 2x^2 + 5.$$

□

***Remarque*** *Généralement : $g \circ f \neq f \circ g$.*

### I.1.4 Sens de variation

#### I.1.4.a Rappels

Les définitions suivantes ont été vues en classe de Seconde.

**DÉFINITIONS I.1.2**

Soit $f$ une fonction et I un intervalle inclus dans son ensemble de définition.

**(1)** On dit que $f$ est *strictement croissante* sur I lorsque pour tous éléments $a$ et $b$ de I on a :

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad f(a) < f(b).$$

**(2)** On dit que $f$ est *strictement décroissante* sur I lorsque pour tous éléments $a$ et $b$ de I on a :

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad f(b) < f(a).$$

**(3)** On dit que $f$ est *strictement monotone* sur I lorsqu'elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

***Remarques***

***1.*** *Dire que $f$ est strictement croissante sur I signifie que sur cet intervalle $f$ conserve l'ordre.*

***2.*** *Dire que $f$ est strictement décroissante sur I signifie que sur cet intervalle $f$ inverse l'ordre.*

***3.*** *On définit de même une fonction* croissante *(respectivement* décroissante *) sur un intervalle I en remplaçant l'implication par : $a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad f(a) \leqslant f(b)$ (respectivement : $a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad f(a) \geqslant f(b)$ ).*

***4.*** *Toute fonction strictement croissante sur I est en particulier croissante sur I : La condition « strictement croissante » (respectivement « strictement décroissante »)est plus forte que la condition « croissante » (respectivement « décroissante »).*

***5.*** *Les fonctions constantes sur un intervalle sont à la fois croissantes et décroissantes sur cet intervalle mais ne sont ni strictement croissantes, ni strictement décroissantes sur cet intervalle.*

**THÉORÈME I.1.2**

**(1)** Soit $f$ une fonction strictement croissante sur un intervalle I, on a pour tous éléments $a$ et $b$ de I :

$$a < b \quad \Longleftrightarrow \quad f(a) < f(b).$$

**(2)** Soit $f$ une fonction strictement décroissante sur un intervalle I, on a pour tous éléments $a$ et $b$ de I :

$$a < b \quad \Longleftrightarrow \quad f(b) < f(a).$$

**Démonstration**

**(1)** Soit $a$ et $b$ deux éléments de I. D'après la définition I.1.2 : $a < b \quad \Longrightarrow \quad f(b) < f(a)$.

Réciproquement, $f$ une fonction strictement croissante sur I, elle est donc croissante sur I, d'où il vient : $a \geqslant b \quad \Longrightarrow \quad f(a) \geqslant f(b)$ ;

Nous en déduisons par contraposition : $a < b \quad \Longleftarrow \quad f(a) < f(b)$ ; ce qui achève la démonstration de la propriété.

On démontre de même la propriété **(2)**. □

**DÉFINITION I.1.3**

Étudier le sens de variation d'une fonction, c'est déterminer les intervalles maximaux sur lesquelles la fonction est strictement croissante, strictement décroissante ou constante.

### I.1.4.b Sens de variation et composition

Soit $f$ une fonction, I un intervalle inclus dans son ensemble de définition et $g$ une fonction dont l'ensemble de définition contient $f(\text{I})$.

Si $f$ est strictement décroissante sur I et $g$ strictement décroissante sur $f(\text{I})$ alors $g \circ f$ inversera successivement deux fois l'ordre sur I ; on en déduit que $g \circ f$ est strictement croissante sur I.

Plus généralement on a le théorème suivant :

**THÉORÈME I.1.3**

Si $f$ est une fonction strictement monotone sur un intervalle I et si $g$ est une fonction strictement monotone sur $f(\text{I})$, alors $g \circ f$ est une fonction strictement monotone sur un intervalle I ; plus précisément, le sens de variation de $g \circ f$ est donné dans le tableau ci-dessous.

| | $f$ est strictement croissante sur I | $f$ est strictement décroissante sur I |
|---|---|---|
| $g$ est strictement croissante sur $f(\text{I})$ | $g \circ f$ est strictement croissante sur I | $g \circ f$ est strictement décroissante sur I |
| $g$ est strictement décroissante sur $f(\text{I})$ | $g \circ f$ est strictement décroissante sur I | $g \circ f$ est strictement croissante sur I |

***Remarques***

***1.*** *Si $g$ est strictement croissante sur $f(\mathrm{I})$ alors $g\circ f$ a le même sens de variation que $f$ sur I.*

***2.*** *Si $g$ est strictement décroissante sur $f(\mathrm{I})$ alors $g\circ f$ a le sens de variation contraire de celui de $f$ sur I.*

***3.*** *Le théorème I.1.3 reste vrai si on remplace « strictement monotone » par « monotone ».*

### I.1.4.c Sens de variation et opérations

**THÉORÈME I.1.4**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions, I un intervalle inclus dans leur ensemble de définition et $k$ un nombre réel.

**(1)** Si $k>0$, alors $kf$ a le même sens de variation que $f$ sur I.

**(2)** Si $k<0$, alors $kf$ a le sens de variation contraire de celui de $f$ sur I.

**(3)** Si $f$ et $g$ sont strictement croissantes sur I, alors $f+g$ est strictement croissante sur I.

**(4)** Si $f$ et $g$ sont strictement décroissantes sur I, alors $f+g$ est strictement décroissante sur I.

**Démonstration**

**(1)** Si $k>0$, alors $kf$ est la composée de $f$ par $x\mapsto kx$, qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $kf$ a le même sens de variation que $f$ sur I.

**(2)** Si $k<0$, alors $kf$ est la composée de $f$ par $x\mapsto kx$, qui est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc $kf$ a le sens de variation contraire de celui de $f$ sur I.

**(3)** Soit $a$ et $b$ deux éléments de I.

$$a<b \implies \begin{cases} f(a)<f(b) \\ g(a)<g(b) \end{cases} \implies f(a)+g(a)<f(b)+g(b)$$

**(4)** Soit $a$ et $b$ deux éléments de I.

$$a<b \implies \begin{cases} f(a)>f(b) \\ g(a)>g(b) \end{cases} \implies f(a)+g(a)>f(b)+g(b)$$

□

***Remarque*** *Dans les propriétés (3) et (4), lorsque $f$ et $g$ n'ont pas le même sens de variation, on ne peut rien conclure (voir exercice I.1.j.)*

## I.1.5 Exercices

**I.1.a.** **1.** Développer : $(x-3)(x-1)$.

**2.** Démontrer que les fonctions $f$ et $g$ définies par les expressions ci-dessous sont égales.

$$f(x)=\frac{2}{x^2-4x+3} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}$$

**I.1.b.** Démontrer que les fonctions $f$ et $g$ définies par les expressions ci-dessous sont égales.

$$f(x)=\frac{3x^2+4x+2}{(x+1)^2} \quad \text{et} \quad g(x)=3-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

**I.1.c.** Les fonctions $f: x\mapsto \dfrac{x^2+x}{x}$ et $g: x\mapsto x+1$ sont-elles égales ?

**I.1.d.** Les fonctions $f: x\mapsto x$ et $g: x\mapsto \sqrt{x^2}$ sont-elles égales ?

**I.1.e.** On considère les fonctions $f: x\mapsto 2x-3$ et $g: x\mapsto -3x+7$.
Déterminer $g\circ f$ et $f\circ g$.

**I.1.f.** On considère les fonctions $f: x\mapsto 2x^2-3$ et $g: x\mapsto -3x^2+7x$.
Déterminer $g\circ f$ et $f\circ g$.

**I.1.g.** On considère les fonctions affines $f: x\mapsto 2x-3$ et $\mathrm{I}d: x\mapsto x$.
Déterminer une fonction affine $g$ telle que : $g\circ f=\mathrm{I}d$.
A-t-on : $f\circ g=\mathrm{I}d$ ?

**I.1.h.** Une fonction constante sur un intervalle I est-elle croissante sur cet intervalle ?

**I.1.i.** Soit $f$ une fonction décroissante sur un intervalle I. Démontrer que pour tous éléments $a$ et $b$ de I, on a : $f(a)>f(b)\implies a<b$.

**I.1.j.** **1.** Donner un exemple d'une fonction $f$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et d'une fonction $g$ strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ tels que $f+g$ soit strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**2.** Donner un exemple d'une fonction $f$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et d'une fonction $g$ strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ tels que $f+g$ soit strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

**3.** Conclure.

**I.1.k.** On rappelle que la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Déterminer le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle considéré.

**a.** $f(x)=\sqrt{x}+2x-1$ sur $[0;+\infty[$.

**b.** $f(x)=\sqrt{x}-1$ sur $[0;+\infty[$.

**c.** $f(x)=x-2\sqrt{x}+1$ sur $[1;+\infty[$.

**d.** $f(x)=-3\sqrt{x}+2$ sur $[0;+\infty[$.

## I.2 Vocabulaire de l'ordre dans $\mathbb{R}$

Considérons une partie non vide, E, de $\mathbb{R}$, par exemple : $\mathrm{E} = ]-3;0] \cup \{2\}$ ;
On a pour tout $x \in \mathrm{E} : 2{,}5 \geqslant x$ ; on dit que $2{,}5$ est *majorant* de E. Tout nombre plus grand que $2{,}5$ est également un majorant de E. L'ensemble des majorants de E est l'intervalle $[2;+\infty[$.

On a pour tout $x \in \mathrm{E} : -4 \leqslant x$ ; on dit que $-4$ est *minorant* de E. Tout nombre plus petit que $-4$ est également un minorant de E. L'ensemble des minorants de E est l'intervalle $]-\infty;-3]$.

E a un *plus grand élément*, 2, mais n'a pas de *plus petit élément*.

Un ensemble qui a des majorants (respectivement des minorants) est dit *majoré* (respectivement *minoré*). Un ensemble à la fois minoré et majoré est dit *borné*. Certaines parties de $\mathbb{R}$, comme $\mathbb{N}$, ne sont pas bornées.

Le plus petit élément de l'ensemble des majorants (respectivement minorants) est appelé *borne supérieure* (respectivement *borne inférieure*). Par exemple la borne supérieure de E est 2 et sa borne inférieure est $-3$.

On dira que $f \leqslant \lambda$ sur un intervalle I lorsque pour tout $x \in \mathrm{I} : f(x) \leqslant \lambda$.
On dira alors que la fonction $f$ est majorée par $\lambda$ sur I.
***Exemple*** *Considérons la fonction $f : x \mapsto 2 - x^2$. Un carré est toujours positif, donc : $f \leqslant 2$ sur $\mathbb{R}$.*
*Ainsi $f$ est majorée par 2 sur $\mathbb{R}$.*

Plus généralement, on adapte ainsi aux fonctions tous le vocabulaire introduit ci-dessus pour les sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

***Exercice I.2.1.*** ***On considère la fonction $f : x \mapsto -2x + 3$ et l'intervalle $\mathrm{I} = [7;10[$. Préciser les bornes de $f(\mathrm{I})$. Sont-elles atteintes ?***

***Solution*** *On a : $-2 < 0$ ; donc $f$ est une fonction affine strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R} : x \in \mathrm{I} \iff 7 \leqslant x < 10 \iff f(7) \geqslant f(x) > f(10) \iff -17 < f(x) \leqslant -11$.*
*Donc : $f(\mathrm{I}) = ]-17;-11]$.*

***Les bornes inférieure et supérieure de $f$ sur I sont respectivement $-17$ et $-11$.***
***La borne inférieure n'est pas atteinte et la borne supérieure est atteinte en 7.***

***Autre méthode*** *On a : $-2 < 0$ ; donc $f$ est une fonction affine strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit le tableau de variation suivant.*

| $x$ | $-\infty$ | | 7 | | 10 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | $+\infty$ | $\searrow$ | $-11$ | $\searrow$ | $-17$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

*Donc : $f\big([7;10[\big) = ]-17;-11]$.*

***Les bornes inférieure et supérieure de $f$ sur I sont respectivement $-17$ et $-11$.***
***La borne inférieure n'est pas atteinte et la borne supérieure est atteinte en 7.***

□

Pour déterminer l'image d'un intervalle par une fonction, la lecture d'un tableau de variation bien dressé est souvent la méthode la plus simple.
Un tableau de variation à valeur de démonstration.

### I.2.1 Exercices

**I.2.a.** L'ensemble $\mathbb{Z}$ est-il borné ?

**I.2.b.** On pose $\mathrm{E} = [-2;-1[\cup[1;2[$.

**1.** E est-il minoré ? majoré ? si oui préciser un minorant, un majorant.

**2.** E est-il borné ? si oui préciser ses bornes.

**3.** E a-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ? si oui préciser lesquels.

**I.2.c.** Donner un exemple d'ensemble borné qui n'a ni plus grand élément ni plus petit élément.

**I.2.d.** Soit E un ensemble qui a un plus grand élément, S. S est-il un majorant de E ?
Démontrer que S est la borne supérieure de E.

## I.3 Parité, périodicité

Désormais, dans ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

### I.3.1 Symétrie d'une partie de $\mathbb{R}$ par rapport à 0

**DÉFINITION I.3.1**
Soit E une partie de $\mathbb{R}$, on dit que E est symétrique par rapport à 0 lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$x \in \mathrm{E} \Longrightarrow -x \in \mathrm{E}.$$

***Exemples***

***1.*** $[-3\,;+\infty[$ *n'est pas symétrique par rapport à 0, en effet,* $4 \in [-3\,;+\infty[$ *et pourtant* $-4 \notin [-3\,;+\infty[$.


***2.*** $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ *n'est pas symétrique par rapport à 0, en effet,* $1 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ *et* $-1 \notin \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

***3.*** $]-\infty\,;-2[\cup]2\,;+\infty[$ *est symétrique par rapport à 0.*


### I.3.2 Fonctions paires, fonctions impaires

**DÉFINITIONS I.3.2**

Soit $f$ une fonction et $\mathrm{D}_f$ son ensemble de définition.

**(1)** La fonction $f$ est dite paire lorsque : $\begin{cases} \mathrm{D}_f \text{ est symétrique par rapport à 0} \\ \text{pour tout } x \in \mathrm{D}_f : \quad f(-x) = f(x) \end{cases}$.

**(2)** La fonction $f$ est dite impaire lorsque : $\begin{cases} \mathrm{D}_f \text{ est symétrique par rapport à 0} \\ \text{pour tout } x \in \mathrm{D}_f : \quad f(-x) = -f(x) \end{cases}$.

**Interprétation graphique** Les fonctions paires sont les fonctions dont la représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (noté O$y$) et les fonctions impaires sont les fonctions dont la représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

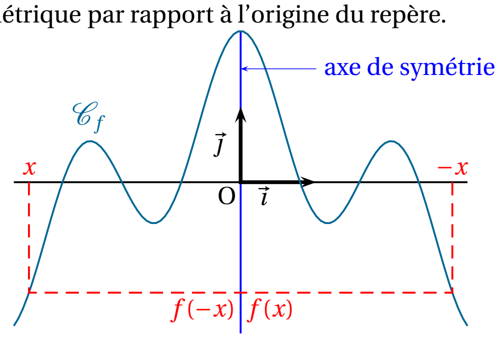



FIG. I.1 – Fonction paire.

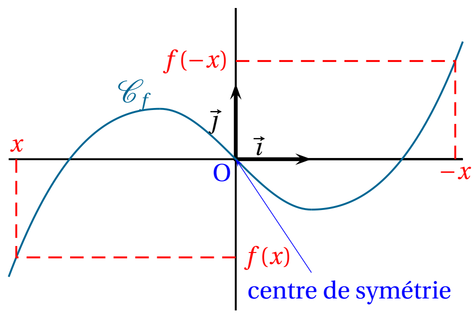



FIG. I.2 – Fonction impaire.

***Remarques***

***1.*** *Généralement une fonction n'est ni paire ni impaire. Le fait d'être paire ou impaire, pour une fonction, est une propriété remarquable.*

***2.*** *Lorsqu'une fonction est paire, on restreint son étude à la partie positive de son ensemble de définition, on trace la courbe correspondant à cette étude, puis on complète la courbe en utilisant la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.*

***3.*** *Lorsqu'une fonction est impaire, on restreint son étude à la partie positive de son ensemble de définition, on trace la courbe correspondant à cette étude, puis on complète la courbe en utilisant la symétrie par rapport à l'origine du repère.*

***Exercice I.3.1.*** ***Étudier la parité de la fonction*** $f : x \mapsto \sqrt{3-x}$.

***Solution*** *La fonction* $f$ *est définie en* $-4$*, mais pas en* $4$*, donc :*

***la fonction $f$ n'est ni paire ni impaire.***

□

Pour démontrer qu'une fonction n'est ni paire ni impaire, il suffit (lorsque cela est possible) d'illustrer par un contre-exemple le fait que l'ensemble de définition n'est pas symétrique par rapport à 0.

***Exercice I.3.2.*** ***Étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto x^2 + x$.***

***Solution*** *On a : $f(1) = 2$ et $f(-1) = 0$. $f(1)$ et $f(-1)$ ne sont ni égaux ni opposés, donc :*

***la fonction $f$ n'est ni paire ni impaire.***

□

Pour démontrer qu'une fonction n'est ni paire ni impaire, il suffit de choisir un nombre et son opposé dont les images ne sont ni égales ni opposées.

***Exercice I.3.3.*** ***Étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto 5x^4 - 4x^2 + \sqrt{2}$.***

***Solution*** *$f$ est une fonction polynôme, elle est donc définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.*
*Pour tout $x \in \mathrm{D}_f$ :*

$$f(-x) = 5(-x)^4 - 4(-x)^2 + \sqrt{2} = 5x^4 - 4x^2 + \sqrt{2} = f(x).$$

***la fonction $f$ est paire.***

□

Pour démontrer qu'une fonction est paire ou impaire il suffit, après s'être assuré que l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0, d'exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.

***Exercice I.3.4.*** ***Étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x}{x^2 - 2}$.***

***Solution*** *On a : $x^2 - 2 = 0 \iff x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.*
*Donc : $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right\}$ ; $\mathrm{D}_f$ est donc symétrique par rapport à 0.*
*Pour tout $x \in \mathrm{D}_f$ :*

$$f(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2 - 2} = \frac{-4x}{x^2 - 2} = -\frac{4x}{x^2 - 2} = -f(x).$$

***la fonction $f$ est impaire.***

□

### I.3.3 Fonctions périodiques

**DÉFINITION I.3.3**

Soit $f$ une fonction, $\mathrm{D}_f$ son ensemble de définition et $p$ un nombre réel.
La fonction $f$ est dite périodique de période $p$ lorsque :

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in \mathbb{R} : & x \in \mathrm{D}_f \iff x + p \in \mathrm{D}_f \\ \text{pour tout } x \in \mathrm{D}_f : & f(x+p) = f(x) \end{cases}.$$

**Interprétation graphique** Les fonctions périodiques de période $p$ sont les fonctions dont la représentation graphique est globalement invariante par la translation de vecteurs $p\vec{\imath}$.

***Remarques***

***1.*** *Pour exprimer qu'une fonction $f$ est périodique de période $p$, on dira souvent qu'elle est $p$-périodique.*

***2.*** *Si $f$ est $p$-périodique et si $k \in \mathbb{Z}$ alors :*

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in \mathbb{R} : & x \in \mathrm{D}_f \iff x + kp \in \mathrm{D}_f \\ \text{pour tout } x \in \mathrm{D}_f : & f(x+kp) = f(x) \end{cases}.$$

***3.*** *Si $p$ est une période de $f$ alors les nombres de la forme $kp$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) sont aussi des périodes de $f$.*

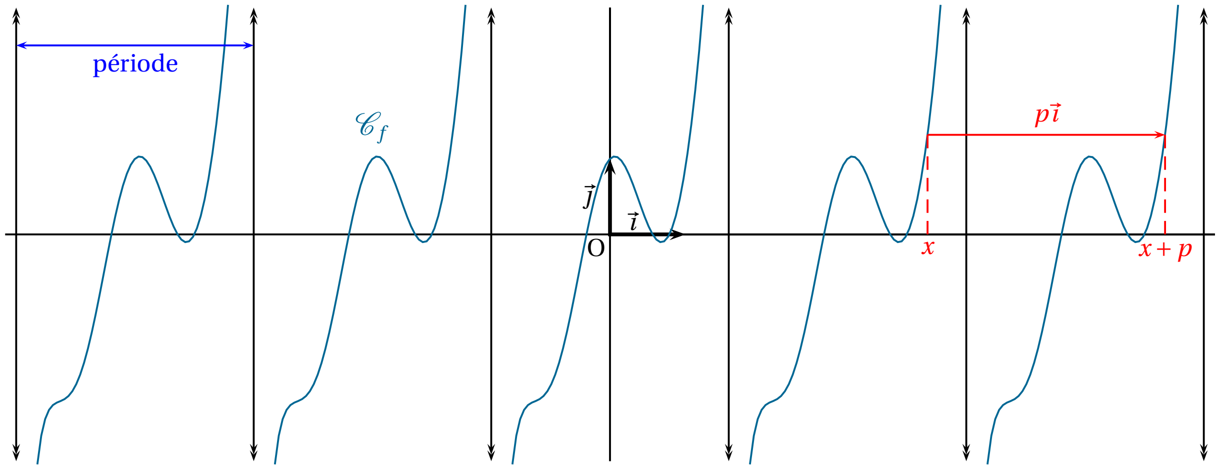



FIG. I.3 – Fonction périodique de période $p$.

**4.** *En pratique, lorsqu'on affirmera qu'une fonction $f$ est $p$-périodique, $p$ sera la plus petite période strictement positive de $f$. Les périodes de $f$ seront alors les multiples de $p$, c'est-à-dire les nombres de la forme $kp$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).*

Le théorème suivant a été vu en classe de Seconde.

**THÉORÈME I.3.1**

**(1)** Les fonctions cos et sin sont $2\pi$-périodiques.

**(2)** La fonction tan est $\pi$-périodique.

**Exercice I.3.5.** ***Soit $f$ une fonction $p$-périodique. Étudier la périodicité de la fonction $g$ définie par : $g(x) = f(2x)$.***

***Solution*** *Pour tout $x$ tel que $2x \in D_f$ : $g(x) = f(2x) = f(2x+p) = f\left(2\left(x+\frac{p}{2}\right)\right) = g\left(x+\frac{p}{2}\right)$.*

*De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$ :*

$$x \in D_g \iff 2x \in D_f \iff 2x+p \in D_f \iff 2\left(x+\frac{p}{2}\right) \in D_f \iff x+\frac{p}{2} \in D_g.$$

$$\boxed{g \text{ est } \frac{p}{2}\text{-périodique.}}$$

□

**Exercice I.3.6.** ***Étudier la périodicité de la fonction $f : x \mapsto 50\sin\left(6x+\frac{\pi}{4}\right)$.***

***Solution*** *La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ :*

$$f(x) = 50\sin\left(6x+\frac{\pi}{4}\right) = 50\sin(6x+\frac{\pi}{4}+2\pi) = 50\sin\left(6\left(x+\frac{2\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{4}\right) = f\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$

$$\boxed{f \text{ est } \frac{\pi}{3}\text{-périodique.}}$$

□

### I.3.4 Exercices

**I.3.a.** Étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x}{x-2}$.

**I.3.b.** Étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto 2x+4$.

**I.3.c.** Étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto 3x^2-7$.

**I.3.d.** Étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^2-7}{x^2+1}$.

**I.3.e.** Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On considère les fonctions $i$ et $p$ définies par :

$$i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$

**1.** Exprimer $p+i$ en fonction de $f$.

**2.** Étudier la parité des fonctions $i$ et $p$.

**3.** Expliciter les fonctions $i$ et $p$ dans le cas où la fonction $f$ est définie par : $f(x) = 2x^3-7x^2+5x-4$.

**4.** Expliciter les fonctions $i$ et $p$ dans le cas où la fonction $f$ est définie par :
$f(x) = \sqrt{3}x^7+6x^6-\pi x^5+5x^4+10x^3-103x+1000$.

**I.3.f.** Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Étudier la parité de $fg$ dans chacun des cas suivants.

**a.** $f$ et $g$ sont paires.

**b.** $f$ et $g$ sont impaires.

**c.** $f$ est paire et $g$ est impaire.

**d.** $f$ est impaire et $g$ est paire.

**I.3.g.** Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Étudier la parité de $f \circ g$ dans chacun des cas suivants.

**a.** $f$ et $g$ sont paires.

**b.** $f$ et $g$ sont impaires.

**c.** $f$ est paire et $g$ est impaire.

**d.** $f$ est impaire et $g$ est paire.

**I.3.h.** Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et $\alpha, \beta$ deux nombres réels.

**a.** Démontrer que si $f$ et $g$ sont paires, alors $\alpha f + \beta g$ est paire.

**b.** Démontrer que si $f$ et $g$ sont impaires, alors $\alpha f + \beta g$ est impaire.

**I.3.i.** Une fonction $f$, définie sur $\mathbb{R}$, est $p$-périodique. Étudier la périodicité de la fonction $g$ définie par : $g(x) = f\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

**I.3.j.** Une fonction $f$ est $p$-périodique. Étudier la périodicité de la fonction $g : x \longmapsto f(5x)$.

**I.3.k.** Une fonction $f$ est $p$-périodique. Étudier la périodicité de la fonction $g : x \longmapsto 7f(5x+3)$.

**I.3.l.** Déterminer $\omega$ pour que la fonction $u : t \longmapsto 220\sin(\omega t)$ soit périodique de période $\dfrac{1}{50}$.

**I.3.m.** $f$ et $g$ sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. $f$ est 4-périodique et $g$ est 10-périodique. Déterminer la période de $2f + 3g$.

**I.3.n.** Désignons par E la fonction partie entière ; pour tout nombre réel $x$, $\mathrm{E}(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $x$. C'est donc l'unique entier vérifiant : $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x) + 1$.

**1.** Donner la partie entière de $\pi$, 6, $-7$ et de $-7{,}5$.

**2.** Démontrer que pour tout réel $x$ : $\mathrm{E}(x+1) = \mathrm{E}(x) + 1$

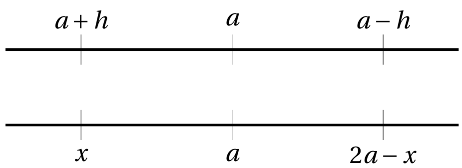
**3.** On considère la fonction $m$ définie par : $m(x) = x - \mathrm{E}(x)$. Démontrer que $m$ est 1-périodique.

**4.** Représenter graphiquement les fonctions E et $m$. (unité graphique : 1 cm)

## I.4 Éléments de symétries d'une courbe

### I.4.1 Symétries dans $\mathbb{R}$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $h$, $a+h$ et $a-h$ sont symétriques par rapport à $a$ ; en effet leur demi-somme vaut $a$. De même $x$ et $2a - x$ sont symétriques par rapport à $a$.




Dans tout ce document $f$ désignera une fonction numérique à variable réelle, $\mathrm{D}_f$ son ensemble de définition et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique relativement à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

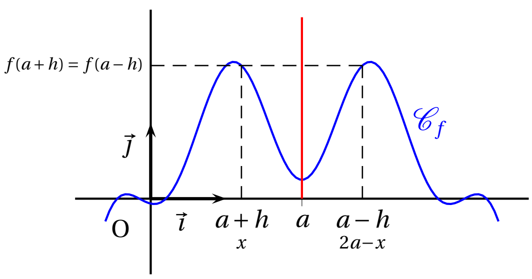
### I.4.2 Axe de symétrie d'une courbe

Une observation graphique permet d'énoncer les théorèmes suivants que nous admettons.

**THÉORÈME I.4.1**

La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = a$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \textbf{(1)} \quad \mathrm{D}_f \text{ est symétrique par rapport à } a. \\ \textbf{(2)} \quad \text{Pour tout réel } h \text{ tel que } a+h \in \mathrm{D}_f : \\ \qquad f(a+h) = f(a-h). \end{cases}$$




***Remarque*** *La condition (2) du théorème I.4.1 peut également s'écrire :*
$\forall x \in \mathrm{D}_f,\ f(2a-x) = f(x)$

***Exercice I.4.1.*** ***On considère la fonction*** $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+4x}$ ***;*** $\mathrm{D}_f$ ***son ensemble de définition et*** $\mathscr{C}_f$ ***sa représentation graphique.***

***1. Développer :*** $(x+2)^2 - 4$ ***; en déduire une autre expression de*** $f(x)$***.***

***2. Démontrer que la droite D d'équation*** $x = -2$ ***est axe de symétrie de*** $\mathscr{C}_f$***.***

***Solution 1.***

$$\boxed{(x+2)^2 - 4 = x^2 + 4x + 4 - 4 = x^2 + 4x}.$$

*On en déduit que pour tout $x \in \mathrm{D}_f$ :*

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{(x+2)^2-4}}}.$$

***2.*** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2+4x = x(x+4)$.*
*Donc : $x^2+4x=0 \iff x=0$ ou $x=-4$ ; d'où : $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{0;-4\}$.*
*$\mathrm{D}_f$ est symétrique par rapport à $-2$.*

***1re méthode*** *Soit $h$ un réel, tel que $-2+h \in \mathrm{D}_f$, on a :*

$$f(-2+h) = \frac{1}{\left((-2+h)+2\right)^2-4} = \frac{1}{h^2-4} \quad \text{et} \quad f(-2-h) = \frac{1}{\left((-2-h)+2\right)^2-4} = \frac{1}{(-h)^2-4} = \frac{1}{h^2-4}.$$

*Pour tout réel $h$ tel que $2+h \in \mathrm{D}_f$, on a : $f(-2+h) = f(-2-h)$ ;*
*donc :*

**la droite D d'équation $x=-2$ est axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.**

***2e méthode*** *Pour tout réel $x \in \mathrm{D}_f$, on a : $f(-4-x) = \dfrac{1}{\left((-4-x)+2\right)^2-4} = \dfrac{1}{(-2-x)^2-4} = \dfrac{1}{(x+2)^2-4} = f(x)$.*

*Donc :*

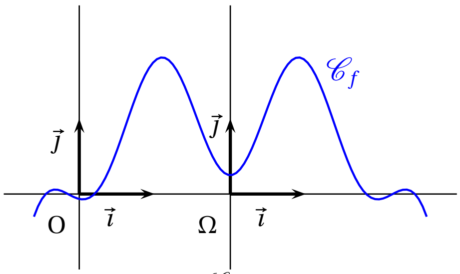
**la droite D d'équation $x=-2$ est axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.**

□

On peut également traiter le problème par un changement d'origine.

**Théorème I.4.2**

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique d'une fonction $f$ relativement à un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $\Omega$ le point de coordonnées $(a,0)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe d'équation $x=a$ si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction paire relativement au repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.




**Exercice I.4.2.** ***Démontrer que la droite D d'équation $x=2$ est axe de symétrie de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)^2-4}$.***

***Solution*** *Soit $\Omega(-2,0)$, M un point du plan, $(x,y)$ ses coordonnées dans le repère $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et (X,Y) ses coordonnées dans le repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On a donc :*

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}} + \overrightarrow{\mathrm{O}\Omega} \text{ avec } \overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}\ ;\ \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}} = \mathrm{X}\,\vec{\imath} + \mathrm{Y}\,\vec{\jmath} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{O}\Omega} = -2\,\vec{\imath}.$$

*Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont le même couple de coordonnées, on a donc la formule de changement de repère :*

$$\begin{cases} x = \mathrm{X}-2 \\ y = \mathrm{Y} \end{cases}.$$

*On a donc :*

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in \mathscr{C}_f &\iff y = \frac{1}{(x+2)^2-4} \\ &\iff \mathrm{Y} = \frac{1}{(\mathrm{X}-2+2)^2-4} \\ &\iff \mathrm{Y} = \frac{1}{\mathrm{X}^2-4} \end{aligned}$$

*La fonction rationnelle $q : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-4}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$, qui est symétrique par rapport à 0 et pour tout élément $x$ de cet ensemble :*

$$q(-x) = \frac{1}{(-x)^2-4} = \frac{1}{x^2-4} = q(x).$$

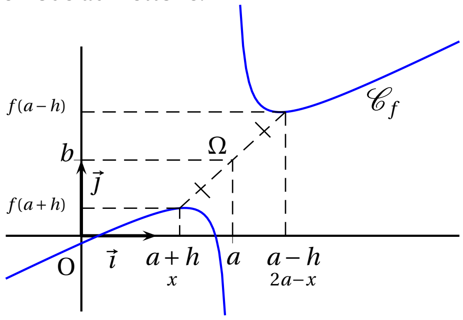
*Donc $q$ est une fonction paire. Dans le repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction paire, donc :*

***la droite D d'équation $x = -2$ est axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.***

□

### I.4.3 Centre de symétrie d'une courbe

Une observation graphique permet d'énoncer les théorèmes suivants que nous admettons.




**THÉORÈME I.4.3**

La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au point $\Omega(a,b)$ si et seulement si :

- **(1)** $D_f$ est symétrique par rapport à $a$.
- **(2)** Pour tout réel $h$ tel que $h \in D_f$ : $\dfrac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$.

***Remarque*** *La condition **(2)** du théorème I.4.3 peut également s'écrire :*
$\forall x \in D_f,\ 2b - f(2a-x) = f(x)$

**Exercice I.4.3.** ***Démontrer que le point $\Omega(2;1)$ est centre de symétrie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$.***

***Solution*** *$f$ est une fonction rationnelle, son ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ et $D_f$ est symétrique par rapport à 2.*

***1^re^ méthode*** *Soit $h$ un réel tel que $2+h \in D_f$, on a :*

$$\begin{aligned} f(2+h) &= \frac{(2+h)^2-3(2+h)+3}{(2+h)-2} \\ &= \frac{h^2+4h+4-3h-6+3}{h} \\ &= h+1+\frac{1}{h} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(2-h) &= \frac{(2-h)^2-3(2-h)+3}{(2-h)-2} \\ &= \frac{h^2-4h+4+3h-6+3}{-h} \\ &= -h+1-\frac{1}{h} \end{aligned}$$

*Pour tout réel $h$ tel que $2+h \in D_f$, on a :*

$$\frac{f(2+h)+f(2-h)}{2} = \frac{1}{2}\left(h+1+\frac{1}{h}-h+1-\frac{1}{h}\right) = 1$$

*donc le point $\Omega(2;1)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.*

***2^e^ méthode*** *Pour tout $x$ de $D_f$, on a :*

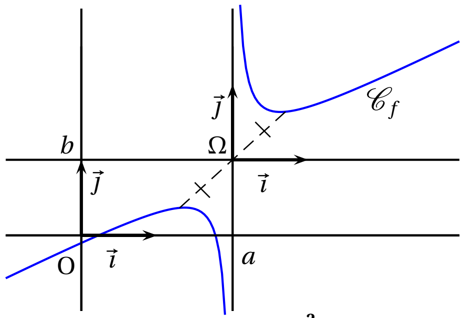
$$\begin{aligned} 2-f(4-x) &= 2-\frac{(4-x)^2-3(4-x)+3}{(4-x)-2} \\ &= \frac{2(x-2)}{x-2}+\frac{x^2-8x+16+3x-12+3}{x-2} \\ &= \frac{-x^2-3x+3}{x-2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

*donc le point $\Omega(2;1)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.* □

On peut également traiter le problème par un changement d'origine.

**THÉORÈME I.4.4**

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique d'une fonction $f$ relativement à un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $\Omega$ le point de coordonnées $(a,b)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à $\Omega$ si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction impaire relativement au repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.




**Exercice I.4.4.** ***Démontrer que le point $\Omega(2;1)$ est centre de symétrie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$.***

***Solution*** *Soit M un point du plan, $(x,y)$ ses coordonnées dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et (X,Y) ses coordonnées dans le repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On a donc :*

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{O\Omega} \text{ avec } \overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}\,;\ \overrightarrow{\Omega M} = X\,\vec{\imath} + Y\,\vec{\jmath} \text{ et } \overrightarrow{O\Omega} = 2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}$$

*Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont le même couple de coordonnées, on a donc la formule de changement de repère :*

$$\left\{\begin{array}{l} x = X+2 \\ y = Y+1 \end{array}\right. .$$

*On a donc :*

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{C} &\iff y = \frac{x^2-3x+3}{x-2} \\
&\iff Y+1 = \frac{(X+2)^2-3(X+2)+3}{(X+2)-2} \\
&\iff Y = -1 + \frac{X^2+4X+4-3X-6+3}{X} \\
&\iff Y = -1 + \frac{X^2}{X} + \frac{X}{X} + \frac{1}{X} \\
&\iff Y = X + \frac{1}{X}
\end{aligned}$$

*La fonction rationnelle $g : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^\star$, qui est symétrique par rapport à 0 et pour tout réel non nul $x$ :*

$$g(-x) = (-x) + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -g(x).$$

*Donc g est une fonction impaire et par suite le point $\Omega(2;1)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.* □

## I.4.4 Exercices

**I.4.a.** L'ensemble $\mathbb{Z}$ est-il symétrique par rapport 6,5 ?

**I.4.b.** L'ensemble E défini par : $E = [2;3[\cup]5;6[$ ; est-il symétrique par rapport à 4 ?

**I.4.c.** Démontrer que la représentation graphique, $\mathscr{C}_f$, de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{(2x-3)^2+2}$ est symétrique par rapport à l'axe d'équation : $x = \dfrac{3}{2}$.

**I.4.d.** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x-3}$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

**1.** Déterminer l'ensemble de définition, $D_f$ de la fonction $f$ et démontrer que pour tout $x \in D_f$ : $f(x) = 2 + \dfrac{9}{x-3}$.

**2.** Démontrer que le point A(3;2) est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

**I.4.e.** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^3-11x^2+19x-11}{(x-1)(x-3)}$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

**1.** Déterminer l'ensemble de définition, $D_f$ de la fonction $f$ et démontrer que pour tout $x \in D_f$ :

$$f(x) = 2x-3 + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-3)}.$$

**2.** Démontrer que le point A(2;1) est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

**I.4.f.** Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{(2x-3)^2+2}$, $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique et et $\Omega$ le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2};0\right)$.

**1.** Déterminer une équation de $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**2.** En déduire que $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe d'équation : $x = \frac{3}{2}$..

**I.4.g.** Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+3}{x-3}$, $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique et et $\Omega$ le point de coordonnées $(3;2)$.

**1.** Déterminer une équation de $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**2.** En déduire que $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à $\Omega$.

## I.5 Expressions analytiques de quelques transformations

Pour chaque transformation, $t$, étudiée, $M'(x',y')$ désignera l'image de $M(x,y)$. L'expression analytique de $t$ est l'expression de $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.

### I.5.1 Expression analytique d'une translation

Désignons par $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. On a pour tout point $M(x,y)$ d'image $M'(x',y')$ :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{v}.$$

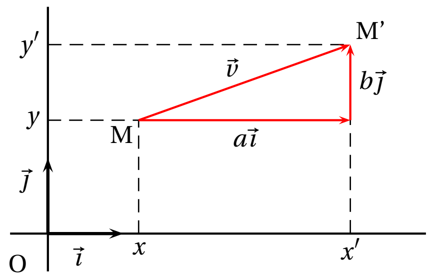



FIG. I.4 – Translaton de vecteur $\vec{v}$.

On en déduit en introduisant l'origine O par lar la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{v}.$$

On sait que deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées on en déduit l'expression analytique de $t$ :

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}.$$

### I.5.2 Expression analytique de la symétrie par rapport à la première bissectrice

On suppose ici que le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthonormé. $\Delta$ désigne la droite d'équation : $y = x$. $\Delta$ est l'une des bissectrices des axes $Ox$ et $Oy$.

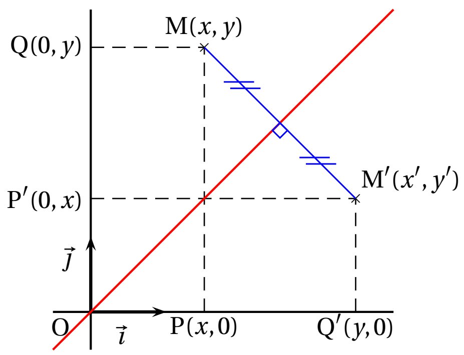


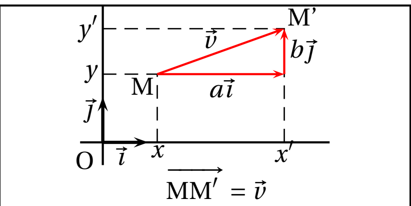
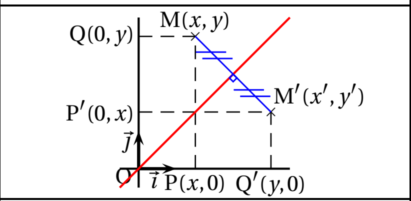
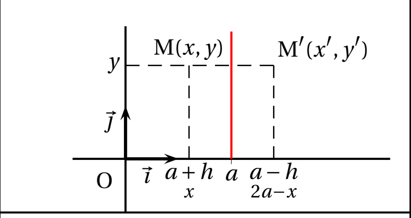
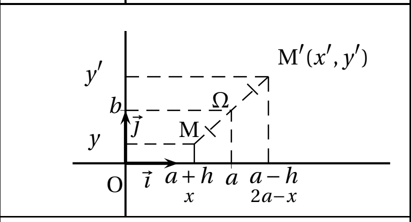
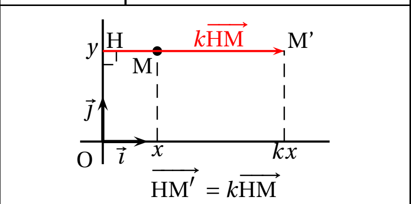

FIG. I.5 – Symétrie par rapport à la première bissectrice.

Désignons par $s_\Delta$ la symétrie d'axe $\Delta$. $s_\Delta$ transforme O$x$ en O$y$ et O$y$ en O$x$. Désignons par P et Q les projetés othogonaux respectifs de M sur O$x$ et O$y$, ils ont respectivement pour coordonnées $(x, 0)$ et $(0, y)$. Le quadrilatère OPMQ a trois angles droits (en O, P et Q), c'est donc un rectangle. $s_\Delta$ est une isométrie elle conserve donc les distances et l'orthogonalité. En particulier elle transformera le rectangle OPMQ en un rectangle OP$'$M$'$Q$'$. P est sur O$x$ donc P$'$ est sur O$y$, de plus OP$'$ = OP, donc P$'$ a pour coordonnées $(0, x)$. De même Q$'$ a pour coordonnées $(y, 0)$. P$'$ et Q$'$ sont les projetés orthogonaux de M$'$ sur les axes de coordonnées, on en déduit l'expression analytique de $s_\Delta$ :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}.$$

### I.5.3 Quelques expressions analytiques

Plus généralement, un graphique adapté permet de retrouver les expressions analytiques suivantes :

<table>
<tr><th>Transformation</th><th>M a pour image M'</th><th>Expresion analytique</th></tr>
<tr><td>Translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$</td><td></td><td>$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Symétrie par rapport à la première bissectrice</td><td></td><td>$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Symétrie par rapport à la droite d'équation $x = a$</td><td></td><td>$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Symétrie de centre $\Omega(a, b)$</td><td></td><td>$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Affinité orthogonale d'axe O$y$ et de rapport $k$</td><td></td><td>$\begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases}$</td></tr>
</table>

TAB. I.1 – Quelques expressions analytiques.

### I.5.4 Exercice résolu

***Exercice I.5.1.*** ***Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On désigne par par $\mathscr{P}$ la parabole d'équation, $y = x^2$, et par $\mathscr{P}'$ son image par la translation, $t$, de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.***
***Déterminer une équation de $\mathscr{P}'$.***

***Solution*** *La translation a pour expression analytique :*

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

*Pour tout point* $\mathrm{M}(x,y)$ *du plan d'image* $\mathrm{M}'(x',y')$ *par la trans lation, on a :*

$$\mathrm{M}' \in \mathscr{P}' \iff \mathrm{M} \in \mathscr{P} \iff y = x^2 \iff y' - 3 = \left(x' - 2\right)^2 \iff y' = \left(x' - 2\right)^2 + 3.$$

$\mathscr{P}'$ *a donc pour équation :*

$$\boxed{\boldsymbol{y = (x-2)^2 + 3}}.$$

□

### I.5.5 Exercices

Dans toute cette série, le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**I.5.a.** Donner une expression analytique de la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

**I.5.b.** Donner une expression analytique de la réflexion d'axe d'équation : $x = 3$.

**I.5.c.** Donner une expression analytique de la symétrie de centre $\mathrm{A}(-2;3)$.

**I.5.d.** Donner une expression analytique de l'affinité orthogonale d'axe $\mathrm{O}x$ et de rapport $-2$.

**I.5.e.** On désigne par par $\mathscr{P}$ la parabole d'équation, $y = x^2$, et par $\mathscr{P}'$ son image par la symétyrie, $s$, de centre $\mathrm{A}(-1;-2)$.
Déterminer une équation de $\mathscr{P}'$.

## I.6 Fonctions associées

Dans toute cette section $u$ désigne une fonction de référence, c'est-à-dire une fonction que l'on supposera bien connue, $\mathscr{C}_u$ désignera sa représentation graphique, $f$ désignera une fonction définie à partir de $u$ (par exemple par $f(x) = u(x+3) - 4$) et $\mathscr{C}_f$ désignera la représentation graphique de $f$.
Le but de cette section est de dégager un procédé permettant, sans calcul, de tracer $\mathscr{C}_f$ connaissant $\mathscr{C}_u$.

### I.6.1 Principaux cas

Les principaux cas d'associations de fonctions sont regroupés dans le tableau I.2. Pour retrouver aisément, à partir de l'expression de $f(x)$, l'expression analytique de l'application du plan dans lui-même par laquelle $\mathscr{C}_f$ est l'image de $\mathscr{C}_u$ ; il suffit de choisir un point $\mathrm{M}(x,y)$ sur $\mathscr{C}_u$ et de considérer son image $\mathrm{M}'(x',y')$. Dans le cas où $f$ est définie par : $f(x) = u(x-a) + b$ ; les coordonnées de M' vérifieront :

$$y' = f(x') = \overbrace{u(\underbrace{x'-a}_{x})}^{y} + b;$$

d'où l'on tire l'expression analytique recherchée.

***Remarques***

***1.*** *Les deux premiers cas sont des cas particuliers du troisième.*

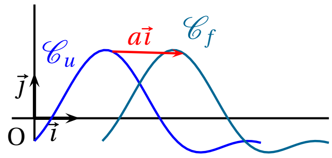
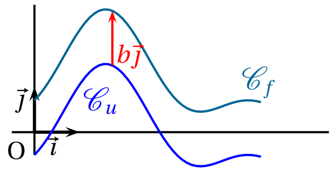
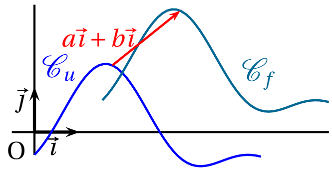
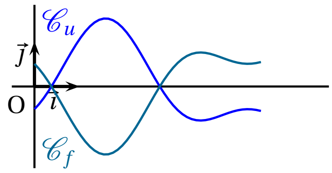
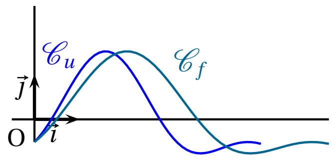
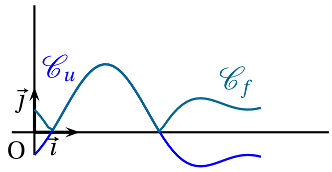
***2.*** *Dans le dernier cas l'application du plan dans lui-même employée n'est pas une transformation car elle n'est bijective*[1]*. En effet les points au-dessous de l'axe* $\mathrm{O}x$ *n'ont pas d'antécédent et les points au-dessus de l'axe des abscisses ont deux antécédents : eux-même et leur symétrique par rapport à l'axe des abscisses.*

### I.6.2 Exercices résolus

***Exercice I.6.1.*** ***Le plan est muni d'un repère othonormé*** $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ***(unité graphique : 1 cm).***
***On se propose de tracer la courbe*** $\mathscr{H}$ ***représentant graphiquement la fonction*** $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+1}$.
***1. Donner l'ensemble de définition,*** $\mathrm{D}_f$***, de*** $f$ ***et démontrer que pour tout élément,*** $x$***, de cet ensemble :***

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x+1}. \tag{I.1}$$

[1] Une bijection d'un ensemble E dans un ensemble F est une application de E vers F telle que tout élément de F a un antécédent et un seul.

| **Expresion de $f(x)$** | **$\mathscr{C}_u$ a pour image $\mathscr{C}_f$** | **Expresion analytique** | **Transformation** |
|---|---|---|---|
| $f(x) = u(x-a)$ |  | $\begin{cases} x' = x+a \\ y' = y \end{cases}$ | Translation de vecteur $a\vec{\imath}$ |
| $f(x) = u(x)+b$ |  | $\begin{cases} x' = x \\ y' = y+b \end{cases}$ | Translation de vecteur $b\vec{\jmath}$ |
| $f(x) = u(x-a)+b$ |  | $\begin{cases} x' = x+a \\ y' = y+b \end{cases}$ | Translation de vecteur $a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}$ |
| $f(x) = -u(x)$ |  | $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ | Réflexion d'axe O$x$ |
| $f(x) = u(ax)$ |  | $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{a}x \\ y' = y \end{cases}$ | Affinité orthogonale d'axe O$y$ et de rapport $\dfrac{1}{a}$ |
| $f(x) = \lvert u(x)\rvert$ |  | $\begin{cases} x' = x \\ y' = \lvert y\rvert \end{cases}$ | |

TAB. I.2 – Courbes de quelques fonctions associées.

***2. Déduire de (I.1) que $\mathscr{H}$ est l'image par une transformation simple d'une courbe connue et tracer $\mathscr{H}$.***

***Solution***

***1.*** $\boxed{\mathrm{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}}$.

*Pour tout $x \in \mathrm{D}_f$ :*

$$\boxed{\mathbf{2 - \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)-1}{x+1} = \frac{2x+2-1}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1} = f(x)}}.$$

***2.*** *D'après (I.1) :*

$$\boxed{\textit{$\mathscr{H}$ est l'image de la courbe d'équation : } y = -\frac{1}{x}\textit{ ; par la translation, t, de vecteur : } \vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}.}$$

*Introduisons l'image A de l'origine, O, par $t$. $\mathscr{H}$ est la repésentation graphique de la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ dans le repère $(\mathrm{A}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On en déduit la courbe de la figure I.6.* □

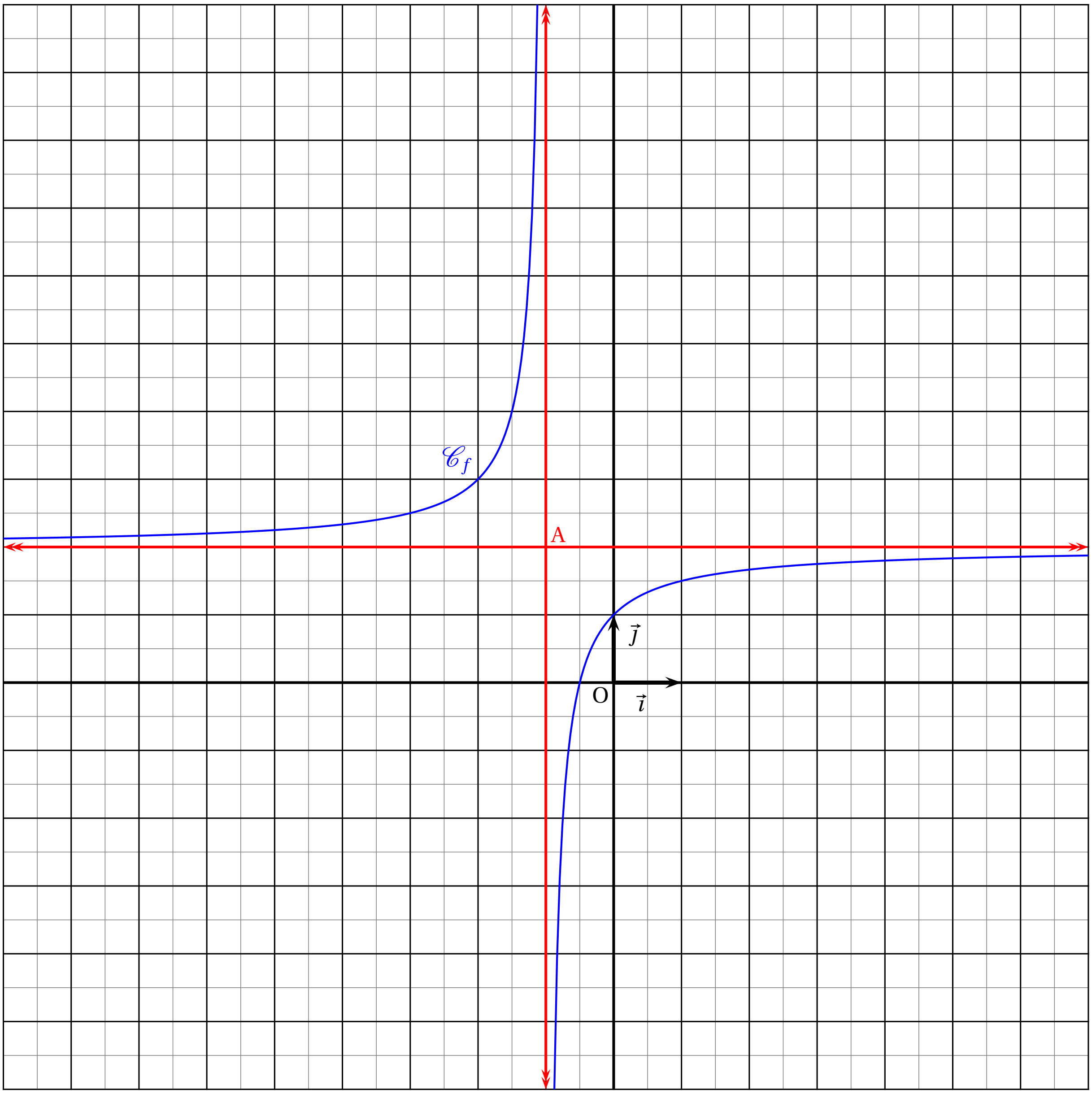



FIG. I.6 – Repésentation graphique de $f$.

# Chapitre II

# Polynômes

## II.1 Généralités

Un monôme ou fonction monôme est une expression ou une fonction de la forme $ax^n$ ou $x \mapsto ax^n$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Le nombre $a$ est appelé coefficient du monôme et le naturel $n$ son degré. Ces deux nombres caractérisent le monôme.

***Exemples***

***1.*** $\pi x$ *est le monôme de degré* $1$ *et de coefficient* $\pi$.

***2.*** $-7$ *est le monôme de degré* $0$ *et de coefficient* $-7$.

***3.*** $3x^{-1}$ *et* $2x^{\frac{1}{2}}$ *ne sont pas des monômes car ni* $-1$ *ni* $\dfrac{1}{2}$ *ne sont sont des entiers naturels.*

**DÉFINITION II.1.1**

Un polynôme est une somme finie de monômes.

***Notations et vocabulaire***

***1.*** *Dans une écriture réduite :* $\mathrm{P}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *(avec* $a_n \neq 0$*) ; le monôme de plus haut degré, ici* $a_nx^n$*, est appelé monôme dominant, son coefficient (ici* $a_n$*) est appelé coefficient dominant et son degré (ici* $n$*) est appelé degré du polynôme, on notera :* $\deg \mathrm{P} = n$.

***2.*** *Le quotient de deux polynômes est appelé fonction rationnelle ou fraction rationnelle.*

***3.*** *Le quotient de deux fonctions affines est appelé fonction homographique.*

**Cas particuliers**

**1.** Le polynôme nul est défini par : $\mathrm{P}(x) = 0$.

**2.** Les monômes sont des cas particuliers de polynômes.

**3.** Les fonctions affines sont des cas particuliers de polynômes.

**4.** Les fonctions affines sont des cas particuliers de fonctions homographiques.

**5.** Les fonctions homographiques et les polynômes sont des cas particuliers de fonction rationnelles.

***Exemple*** *La fonction* $\mathrm{P}$ *définie par* $\mathrm{P}(x) = 5x^4 - 3x^2 + 7x - 1$ *est un polynôme de degré* $4$*, son coefficient dominant est* $5$ *et son monôme dominant est* $5x^4$.

***Remarques***

***1.*** *Un polynôme est toujours défini sur* $\mathbb{R}$.

***2.*** *Pour tous polynômes* $\mathrm{P}$ *et* $\mathrm{Q}$ *:* $\deg(\mathrm{P} \times \mathrm{Q}) = \deg \mathrm{P} + \deg \mathrm{Q}$.

Nous admettons le théorème suivant.

**THÉORÈME II.1.1**

Deux polynômes $f$ et $g$, distincts du polynôme nul, sont égaux si, et seulement si :

1. $f$ et $g$ ont le même degré ;
2. les coefficients $a_0, \cdots, a_n$ de $f$ et $b_0, \cdots, b_n$ de $g$ vérifient pour tout $i \in [\![0;1]\!]$ : $a_i = b_i$.

**DÉFINITION II.1.2**

Une racine d'un polynôme $f$ est un nombre $\alpha$ tel que : $f(\alpha) = 0$.

***Exemple*** *Considérons la fonction polynôme* $f : x \mapsto 2x^2 - 5x + 3$ *; on a :* $f(1) = 2 - 5 + 3 = 0$ *; donc* $1$ *est racine de* $f$.

***Remarques***
**1.** *Certains polynômes n'ont pas de racine dans* $\mathbb{R}$*, comme par exemple* $P(x)=x^4+x^2+1$ *(car pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *:* $P(x)\geqslant 1$*).*
**2.** *Si* $\alpha$ *est racine du produit* $P\times Q$ *de deux polynômes sans être racine de* $P$*, alors* $\alpha$ *est racine de* $Q$*.*

Nous admettons le théorème suivant.

**Théorème II.1.2 Théorème fondamental de l'algèbre**
Soit $f$ un polynôme présentant une racine $\alpha$.
Il existe un unique polynôme $g$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$ : $f(x)=(x-\alpha)g(x)$.

***Remarque*** $\deg g=(\deg f)-1$.

***Exemple*** *1 est racine de* $2x^3-5x^2+2x+1$ *et on a :* $2x^3-5x^2+2x+1=(x-1)\left(2x^2-3x-1\right)$.

**Corollaire II.1.3**
Un polynôme de degré $n$ a au plus $n$ racines.

**Démonstration** Sous forme factorisée un polynôme de degré $n$ a au plus $n$ facteurs de degré 1. D'après le théorème II.1.2 les racines d'un polynômes sont fournies par ses facteurs de degré 1. On en déduit le corollaire. □

***Exercice II.1.1.*** ***1. 1 est-il racine du polynôme*** $P: x\mapsto 2x^3+x^2-3$ **?**
***2. Factoriser P(on fera apparaître un facteur de gré 1 et un facteur de degré 2).***

***Solution 1.*** *On a :* $P(1)=2\times 1^3+1^2-3=2+1-3=0$ *; donc :*

$$\boxed{\textbf{1 est racine de P.}}$$

**2.** *D'après le théorème fondamental de l'algèbre, on peut mettre* $(x-1)$ *en facteur dans l'expression de* $P(x)$ *:*

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+x^2\quad -3 & x-1 \\ \cline{2-2} 3x^2\qquad\quad & 2x^2+3x+3 \\ 3x-3 & \\ 0 & \end{array}$$

*Pour tout réel x :*

$$\boxed{P(x)=(x-1)\left(2x^2+3x+3\right)}.$$

□

Pour factoriser un polynôme, on peut reconnaître une racine, $\alpha$, puis diviser l'expression de $P(x)$ par $x-\alpha$.

***Exercice II.1.2.*** ***Factoriser*** $P: x\mapsto x^3-2x^2-x+2$ ***(une décomposition en trois facteurs de degré 1 est attendue).***

***Solution*** $P(x)=x^3-x-2x^2+2=x\left(x^2-1\right)-2\left(x^2-1\right)=(x-2)\left(x^2-1\right)=(x-2)(x-1)(x+1)$. □

Pour factoriser un polynôme, on peut regrouper des termes semblables puis reconnaître un facteur commun.

***Exercice II.1.3.*** ***1.*** $\sqrt{2}$ ***est-il racine du polynôme*** $P: x\mapsto 4x^4+12x^3+x^2-24x-18$ **?**
***2. Factoriser P (une décomposition en quatre facteurs de degré 1 est attendue).***

***Solution 1.*** $P\left(\sqrt{2}\right)=16+24\sqrt{2}+2-24\sqrt{2}-18=0$.

$$\boxed{\sqrt{2}\textbf{ est racine de P.}}$$

**2.** *Pour tout réel x, on a :*

$$P(x)=12x^3-24x+4x^4+x^2-18=12x\left(x^2-2\right)+\left(x^2-2\right)\left(4x^2+9\right)=\left(x^2-2\right)\left(4x^2+12x+9\right)$$

*Soit finalement :*

$$\boxed{P(x)=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)(2x+3)^2}.$$

□

Dans l'exercice II.1.3., dans le calcul de $P\left(\sqrt{2}\right)$, on constate que les termes de degré pair sont entiers alors que les termes de degré impairs sont multiples de $\sqrt{2}$ on a donc l'idée, pour factoriser P, de regrouper les monômes suivant leur parité.

## II.1.1 Travaux dirigés

### II.1.1.a Décomposition d'une fonction rationnelle

On considère la fonction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{4x^3+5x^2-2x+3}{x^2+2}$. On se propose d'écrire $f$ sous la forme :

$$f(x) = ax+b+\frac{cx+d}{x^2+2}$$

(cette forme est plus avantageuse pour résoudre certains problèmes).
Pour venir à bout de cette question nous allons utiliser deux méthodes : l'identification des coefficients (méthode officielle) et la division de polynômes (méthode standard).

**Partie A – Identification**

**1.** Préciser l'ensemble de définition de $f$, $\mathrm{D}_f$.
**2.** On se propose de déterminer quatre réels $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que :

$$\text{pour tout } x\in \mathrm{D}_f,\qquad f(x) = ax+b+\frac{cx+d}{x^2+2} \tag{P}$$

**a.** Démontrer que la proposition P est équivalente à :

$$\text{pour tout } x\in \mathrm{D}_f,\qquad 4x^3+5x^2-2x+3 = (ax+b)\left(x^2+2\right)+cx+d \tag{P'}$$

**b.** En développant le second membre de la dernière égalité et en procédant par identification des coefficients, déterminer un système d'équations dont la solution est le quadruplet $(a,b,c,d)$ cherché.
**c.** Résoudre le système obtenu en **A.2.c.** et conclure.
**3.** Procéder de même dans le cas de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x^2+3x+2}{2x+1}$.

**Partie B – Division**

Effectuons la division euclidienne des polynômes :

$$\begin{array}{r|l} 4x^3+5x^2-2x+3 & x^2+2 \\ \cline{2-2} 5x^2-10x & 4x+\dfrac{1}{2} \\ -10x+2 & \end{array}$$

On a donc, pour tout réel $x$ :

$$4x^3+5x^2-2x+3 = \left(x^2+2\right)\left(4x+\frac{1}{2}\right)-10x+2.$$

D'où l'on tire que pour tout réel $x$ :

$$f(x) = 4x+\frac{1}{2}+\frac{-10x+2}{x^2+2}.$$

Procéder de même dans le cas de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x^2+3x+2}{2x+1}$.

**Partie C – Utilisation du théorème fondamental de l'algèbre**

On considère le polynôme :

$$\mathrm{P}(x) = 2x^3-7x^2+7x-2.$$

**1.** Calculer $\mathrm{P}(1)$ et en déduire une factorisation de $\mathrm{P}(x)$ par un polynôme de degré 1.
**2.** Calculer $\mathrm{P}(2)$ et en déduire une décomposition de $\mathrm{P}(x)$ en trois facteurs de degré 1.

### II.1.2 Exercices

**II.1.a.** La fonction $\mathrm{P} : x \mapsto x^2 + \sin^2 x + \cos^2 x$ est-elle un polynôme ?
**II.1.b.** La fonction $\mathrm{P} : x \mapsto x^2 + 3x^{-1}$ est-elle un polynôme ?
**II.1.c.** La fonction $\mathrm{P} : x \mapsto x^2 + 4x^{\frac{1}{2}}$ est-elle un polynôme ?
**II.1.d.** La fonction $\mathrm{P} : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x-1}$ est-elle un polynôme ?
**II.1.e.** La fonction $\mathrm{P} : x \mapsto \dfrac{x^4-1}{x^2+1}$ est-elle un polynôme ?
**II.1.f.** 1 est-il racine de $\mathrm{P} : x \mapsto 3x^2 - 4x + 1$ ?
**II.1.g.** $-2$ est-il racine de $\mathrm{P} : x \mapsto 3x^2 - 4x + 1$ ?
**II.1.h.** $\sqrt{3}$ est-il racine de $\mathrm{P} : x \mapsto 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 9x - 3$ ?
**II.1.i.** Factoriser $\mathrm{P} : x \mapsto 3x^2 - 4x + 1$.
**II.1.j.** Factoriser $\mathrm{P} : x \mapsto 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 9x - 3$.
*(on devra obtenir quatre facteurs de degré 1).*

## II.2 Polynômes du second degré

Un polynôme P de degré 2 défini par $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$), est aussi appelé trinôme du second degré. L'objectif de cette section est de savoir factoriser $\mathrm{P}(x)$, résoudre l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$, étudier le signe $\mathrm{P}(x)$ suivant les valeurs de $x$, représenter graphiquement P et trouver l'extremum de P.

### II.2.1 Forme canonique

Pour factoriser un polynôme P, de la forme : $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$ ; on écrit $\mathrm{P}(x)$ sous forme canonique pour faire apparaître soit la différence de deux carrés (auquel cas $\mathrm{P}(x)$ est factorisable) soit la somme de deux carrés (auquel cas $\mathrm{P}(x)$ n'est pas factorisable). La forme canonique de $\mathrm{P}(x)$ est : $\mathrm{P}(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$. Pour obtenir cette formule, on utilise la démarche explicitée dans le tableau ci-dessous.

| étapes | cas particulier | cas général |
|---|---|---|
| 1. | $\mathrm{P}(x) = 3x^2 + 5x - 7$ | $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$ |
| | $\mathrm{P}(x) = 3\left(x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{7}{3}\right)$ | $\mathrm{P}(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ |
| 2. | $\mathrm{P}(x) = 3\left(x^2 + 2\frac{5}{6}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{7}{3}\right)$ | $\mathrm{P}(x) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$ |
| | $\mathrm{P}(x) = 3\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{7}{3}\right]$ | $\mathrm{P}(x) = a\left[\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$ |
| | $\mathrm{P}(x) = 3\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} - \frac{84}{36}\right]$ | $\mathrm{P}(x) = a\left[\left(x - \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right]$ |
| | $\mathrm{P}(x) = 3\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{109}{36}\right]$ | |
| 3. | $\mathrm{P}(x) = 3\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{109}}{6}\right)^2\right]$ | $\mathrm{P}(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ |
| | $\mathrm{P}(x) = 3\left(x + \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{109}}{6}\right)\left(x + \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{109}}{6}\right)$ | |
| | $\mathrm{P}(x) = 3\left(x - \frac{-5+\sqrt{109}}{6}\right)\left(x - \frac{-5-\sqrt{109}}{6}\right)$ | |

**Récapitulatif des étapes**

1. On met, si besoin est, le coefficient dominant en facteur
2. On reconnaît la somme des termes de degrés 2 et 1 comme le début d'une identité remarquable.
3. Si l'expression entre crochets est la différence de deux quantités positives, alors on reconnaît la différence de deux carrés et on factorise ; sinon, l'expression entre crochets est la somme de deux quantités positives et il n'existe pas de factorisation en produit de facteurs de degré un à coefficient réels.

**Définition II.2.1**
Le nombre, $\Delta$, défini par : $\Delta = b^2 - 4ac$ ; est appelé *discriminant* de P.

La forme canonique de P devient alors :

$$\mathrm{P}(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \tag{II.1}$$

### II.2.2 Représentation graphique et sens de variation

Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$.
D'après (II.1), pour tout réel $x$ :

$$\mathrm{P}(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \tag{II.2}$$

Introduisons la fonction $u : x \mapsto ax^2$ et $\mathscr{C}_u$ sa représentation graphique. D'après (II.2) la courbe, $\mathscr{P}$, de P est l'image de $\mathscr{C}_u$ par la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} -\dfrac{b}{2a} \\ -\dfrac{\Delta}{4a} \end{pmatrix}$.

**THÉORÈME II.2.1**

> La représentation graphique $\mathscr{P}$ de $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) est une parabole d'axe parallèle à O$y$ et de sommet $\mathrm{S}\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ ; de plus, dans le repère $(\mathrm{S}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $\mathscr{P}$ a pour équation : $\mathrm{Y} = a\mathrm{X}^2$.

***Remarque*** *D'après (II.2) on a :* $\mathrm{P}\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{\Delta}{4a}$ *; donc en pratique on obtient l'ordonnée de S en calculant* $\mathrm{P}\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

***Exemple*** *On se propose de représenter graphiquement la fonction $f$ définie par :* $f(x) = x^2 - 5x + 4$.
*On a :* $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{5}{2}$ *et* $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{25}{4} - \dfrac{5}{2} + 4 = \dfrac{16}{4} - \dfrac{25}{4} = -\dfrac{9}{4}$.
*Introduisons le point* $\mathrm{S}\left(\dfrac{5}{2}; -\dfrac{9}{4}\right)$*, dans le repère* $(\mathrm{S}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$*,* $\mathscr{C}_f$ *a pour équation :* $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$.
*Nous en déduisons la courbe de la figure II.1.*

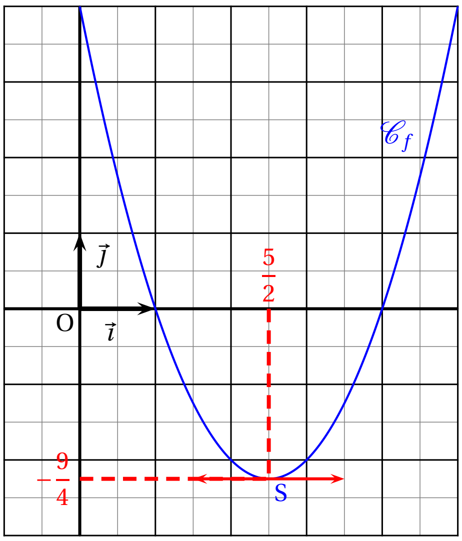



FIG. II.1 – Représentation graphique de $f$.

On déduit du théorème II.2.1 le tableau de variations de P en fonction du signe de $a$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\dfrac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\dfrac{\Delta}{4a}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

FIG. II.2 – Lorsque $a > 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\dfrac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\dfrac{\Delta}{4a}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

FIG. II.3 – Lorsque $a < 0$.

### II.2.3 Factorisation et résolution d'équations

Dans une décomposition en produit, tout facteur de degré1 apporte une racine au polynôme. On en déduit que si P peut se décomposer en produit de deux facteurs de degré 1 alors P a au moins une racine. Ou encore, par contraposition : Si un polynôme de degré 2 n'a pas de racine alors on ne peut pas le décomposer en produit de deux facteurs de degré 1.

Reprenons la forme canonique de P, (II.1) dans le cas où : $\Delta > 0$. On a alors :

$$\mathrm{P}(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

On en déduit la factorisation :

$$\mathrm{P}(x) = a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

En particulier P a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Nous en déduisons le théorème suivant.

**THÉORÈME II.2.2**

Soit $\mathrm{P} : x \mapsto ax^2+bx+c$ (avec $a \neq 0$) un trinôme du second degré et $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant.

**Si $\Delta > 0$** P a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

et pour tout réel $x$ :

$$\mathrm{P}(x) = a(x-x_1)(x-x_2).$$

**Si $\Delta = 0$** P a une racine double :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

et pour tout réel $x$ :

$$\mathrm{P}(x) = a(x-x_0)^2.$$

**Si $\Delta < 0$** P n'a pas de racine et n'est pas factorisable en produit de deux facteurs de degré 1 à coefficients réels.

***Remarques***

***1.*** *Si on remplace $\Delta$ par 0 dans les formules de calcul de $x_1$ et $x_2$, on obtient : $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a} = x_0$.*

***2.*** *Si $a$ et $c$ sont de signes contraires, alors $\Delta > 0$ et P a deux racines distinctes.*

***3.*** *Bien qu'exhaustive, cette méthode n'est pas opportune dans le cas ou la factorisation du polynôme est immédiate (identité remarquable ou polynôme P qui est la somme de 2 monômes).*

***4.*** *Le théorème II.2.2 peut être aussi bien utilisé pour factoriser un polynôme du second degré,P, que pour résoudre l'équation, $\mathrm{P}(x) = 0$ (voir corollaire II.2.3).*

***Exercice II.2.1.*** ***Factoriser lorsque cela est possible.***

**a.** $\mathbf{P}(x) = 2x^2+3x-6$.

**b.** $\mathbf{P}(x) = 2x^2-8x+8$.

**c.** $\mathbf{P}(x) = 2x^2-5x+8$.

**d.** $\mathbf{P}(x) = -5x^2+3x+2$.

***Solution***

***a.*** *On a : $\Delta = 3^2-4\times 2\times(-6) = 57$ ; donc $\Delta > 0$ et P a deux racines :*

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{57}}{4} \quad \textit{et} \quad x_2 = \frac{-3+\sqrt{57}}{4}.$$

*On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ :*

$$\boxed{\mathbf{P}(x) = 2\left(x-\frac{-3-\sqrt{57}}{4}\right)\left(x-\frac{-3+\sqrt{57}}{4}\right)}.$$

***b. Méthode des identités***

$$\boxed{\mathbf{P}(x) = 2\left(x^2-4x+4\right) = 2(x-2)^2}.$$

***Méthode du discriminant*** *On a :* $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0$ *; donc* $\Delta = 0$ *et* P *a une racine double :*

$$x_0 = \frac{8}{4} = 2.$$

*On en déduit que pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\boxed{\mathbf{P}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\,(\boldsymbol{x} - \mathbf{2})^{\mathbf{2}}}.$$

**c.** *On a :* $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (8) = 39$ *; donc* $\Delta < 0$.

$$\boxed{\textbf{\textit{P n'est pas factorisable.}}}$$

***d. Méthode de la racine évidente*** *On voit que* 1 *est racine évidente, donc pour tout réel* $x$ *:*

$$\boxed{\mathbf{P}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \mathbf{1})(-\mathbf{5}\boldsymbol{x} - \mathbf{2})}.$$

***Méthode du discriminant*** *On a :* $\Delta = 3^2 - 4 \times (-5) \times 2 = 49 = 7^2$ *; donc* $\Delta > 0$ *et* P *a deux racines :*

$$x_1 = \frac{-3-7}{-10} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-3+7}{-10} = -\frac{2}{5}.$$

*On en déduit que pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\boxed{\mathbf{P}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\,(\boldsymbol{x} - \mathbf{1})\left(\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right)}.$$

□

**COROLLAIRE II.2.3**

Soit $a$, $b$ et $c$ trois réels (avec $a \neq 0$), E l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{(E)}$$

et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

**Si $\Delta > 0$** (E) a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

**Si $\Delta = 0$** (E) a une seule solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

**Si $\Delta < 0$** (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

***Exercice II.2.2.*** ***Résoudre dans*** $\mathbb{R}$.

**a.** $3x^2 + 5x - 7 = 0$.

**b.** $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

**c.** $3x^2 + 5x + 7 = 0$.

**d.** $-5x^2 + 4x - \frac{4}{5} = 0$.

***Solution*** **a.** *On a :* $\Delta = 25 - 4 \times 3 \times (-7) = 109$ *; donc* $\Delta > 0$, *l'équation a deux solutions :*

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{109}}{6} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{109}}{6}.$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \left\{ \frac{-\mathbf{5} - \sqrt{\mathbf{109}}}{\mathbf{6}}, \frac{-\mathbf{5} + \sqrt{\mathbf{109}}}{\mathbf{6}} \right\}}.$$

***b. Méthode de la racine évidente*** *On voit que* 2 *est racine évidente, donc pour tout réel* $x$ *:*

$$3x^2 - 5x - 2 = (x-2)(3x+1).$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \left\{ \mathbf{2}; -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \right\}}.$$

***c.*** *On a :* $\Delta = 25 - 4 \times 3 \times 7 = -59$ *; donc* $\Delta < 0$.

$$\boxed{\mathbf{S} = \emptyset}.$$

***d. Méthode des identités***

$$-5x^2 + 4x - \frac{4}{5} = -5\left(x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}\right) = -5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2.$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \left\{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right\}}.$$

***Méthode du discriminant*** *On a :* $\Delta = 16 - 4 \times (-5) \times \left(-\frac{4}{5}\right) = 0$ *; donc* $\Delta = 0$*, l'équation a une seule solution :*

$$x_0 = \frac{-4}{-10} = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \left\{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right\}}.$$

□

### II.2.4 Signe d'un trinôme

On se propose de déterminer le signe de $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$ en fonction de $x$. On a vu en II.2.3 que lorsque $\Delta > 0$, on a la factorisation :

$$\mathrm{P}(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Donc en supposant que $x_1 < x_2$, on en déduit le tableau suivant :

| $x$ | | $x_1$ | | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | signe de $a$ | | | | |
| $x - x_1$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| $x - x_2$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $\mathrm{P}(x)$ | signe de $a$ | 0 | signe de $-a$ | 0 | signe de $a$ |

Lorsque $\Delta < 0$, d'après (II.1) : $\mathrm{P}(x) = a \underbrace{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}_{\text{strictement positif}}$ ; donc P est du signe de $a$.

Nous en déduisons le théorème suivant.

**THÉORÈME II.2.4**

Soit $\mathrm{P} : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) un trinôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

**Si $\Delta > 0$** $\mathrm{P}(x)$ est du signe de $a$ à l'extérieur des racines et du signe contraire à l'intérieur.

**Si $\Delta = 0$** $\mathrm{P}(x)$ est du signe de $a$ et s'annule en $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

**Si $\Delta < 0$** $\mathrm{P}(x)$ est du signe de $a$.

***Exercice II.2.3.*** ***Étudier le signe des polynômes suivants.***

**a.** $\mathbf{P_1 : x \mapsto -2x^2 + 3x + 4}$.

**b.** $\mathbf{P_2 : x \mapsto 3x^2 + 3x + 4}$.

**c.** $\mathbf{P_3 : x \mapsto -5x^2 + 2x - \frac{1}{5}}$.

***Solution a.*** *On a :* $\Delta = 9 - 32 = 41$ *; donc* $\Delta > 0$ *et* $\mathrm{P}_1$ *a deux racines :*

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{41}}{-4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{41}}{-4}.$$

*On en déduit que le signe de* $\mathrm{P}_1$ *est donné par le tableau suivant.*

| $x$ | | $\frac{3 - \sqrt{41}}{4}$ | | $\frac{3 + \sqrt{41}}{4}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}_1(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |

***b.** On a : $\Delta = 9 - 48 = -39$ ; donc $\Delta < 0$.*

$$\boxed{\mathbf{P_2 > 0 \text{ sur } \mathbb{R}.}}$$

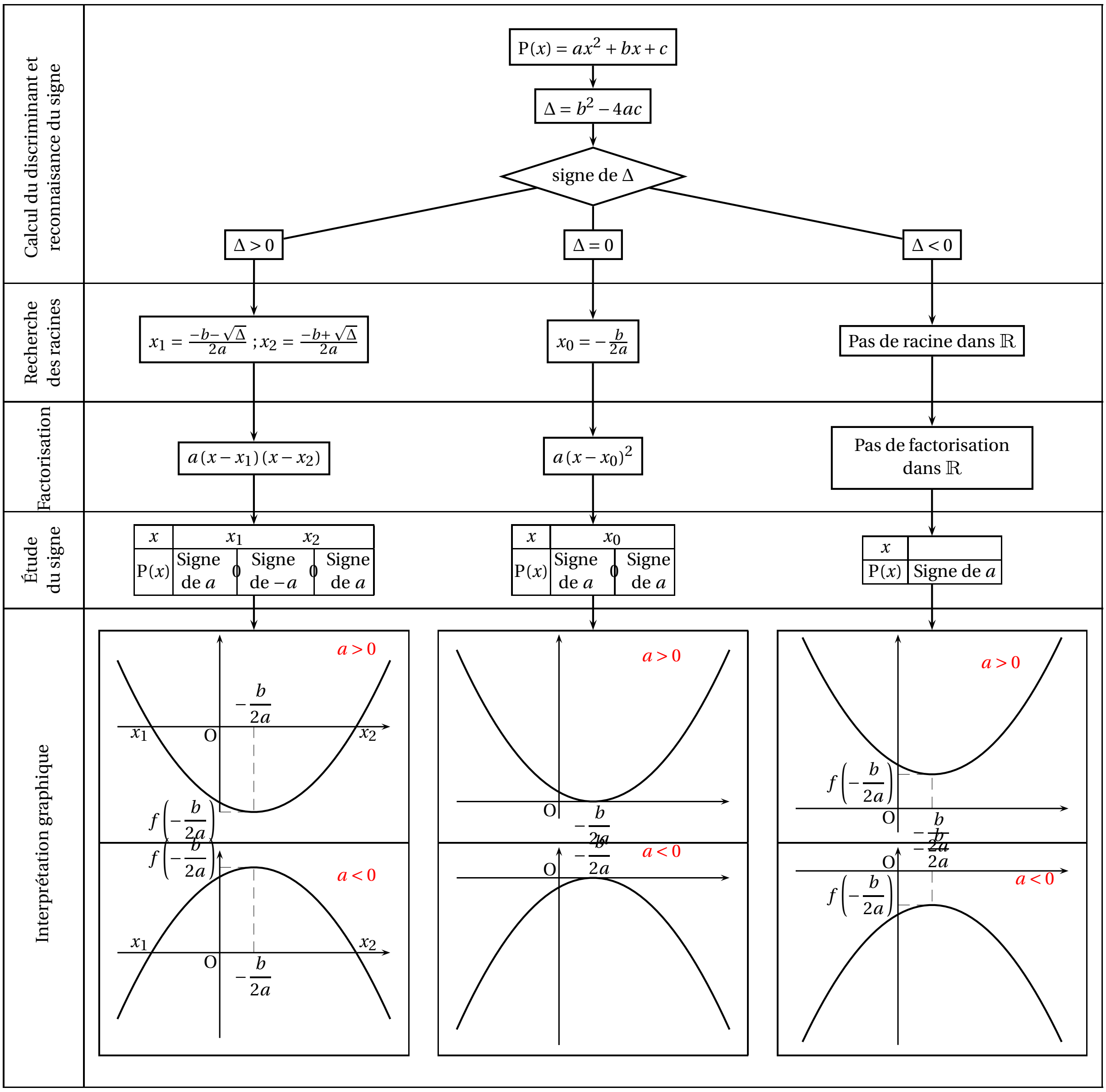
***c.** On a : $\Delta = 4 - 4 = 0$ ; donc $\Delta = 0$ et $\mathrm{P}_3$ a une seule racine :*

$$x_0 = \frac{-2}{-10} = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{\mathbf{P_2 \geqslant 0 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } P_2 \text{ est s'annule seulement en } \frac{2}{5}.}}$$

□

### II.2.5 Tableau récapitulatif




### II.2.6 Travaux dirigés

#### II.2.6.a Factorisation d'expressions bicarrées

Les trinômes bicarrés sont les trinômes de la forme $\mathrm{P} : x \mapsto ax^4 + bx^2 + c$.
L'objectif de ce travail dirigé est de dégagé à travers quelques exemples une méthode générale permettant de décomposer n'importe quel trinôme bicarré en produit de deux facteurs de degré 2.

**Partie A – avec le discriminant**

Factoriser (lorsque c'est possible) les polynômes suivants en utilisant la méthode du discriminant (*on pourra poser :* $X = x^2$).

**1.** $P_1 : x \mapsto 2x^4 + 3x^2 - 1$.

**2.** $P_2 : x \mapsto x^4 + x^2 + 1$.

**3.** $P_3 : x \mapsto 6x^4 - 5x^2 - 6$.

**4.** $P_4 : x \mapsto x^4 + 16$.

**5.** $P_5 : x \mapsto 2x^4 - 7x^2 + 6$.

**6.** $P_6 : x \mapsto 2x^4 - x^2 + 8$.

**Partie B – sans le discriminant**

On constate que certains polynômes considérés ci-dessus ont un discriminant strictement négatif et ne sont donc pas factorisables par la méthode du discriminant. On se rappelle alors que cette méthode découle de la forme canonique que nous avions obtenue en factorisant par le coefficient dominant puis en considérant les deux premiers termes du facteur de degré 2 comme le début d'un carré. L'idée est alors, non pas de considérer les deux premiers termes du facteur de degré 2 comme le début d'un carré, mais de considérer les termes extrêmes du facteur de degré 2 comme les termes extrêmes d'un carré.
Factoriser les polynômes qui ne l'ont pas été dans la partie **A.**

### II.2.6.b Équations en somme et produit

**1.** Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré dont le discriminant est strictement positif.
Exprimer en fonction de $a$, $b$ et $c$ la somme et produit des racines.

**2.** Soit $\alpha$ et $\beta$ deux nombres dont on connaît la somme, $s$ et le produit, $p$.
Démontrer que $\alpha$ et $\beta$ sont les racines du polynôme : $P : x \mapsto x^2 - sx + p$.

**3.** Un rectangle a pour périmètre 24 et pour aire 35, déterminer ses dimensions.

**4.** Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 1 \end{cases}$

**5.** Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = -12 \end{cases}$

### II.2.7 Exercices

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).

**II.2.a.** Écrire $P : x \mapsto x^2 - 2x + 2$ sous forme canonique.

**II.2.b.** Écrire $Q : x \mapsto 4x^2 - 2x + 2$ sous forme canonique.

**II.2.c.** Écrire $R : x \mapsto -5x^2 + 10x + 2$ sous forme canonique.

**II.2.d.** Tracer la courbe $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 - 2x + 2$.

**II.2.e.** Tracer la courbe $\mathscr{P}$ d'équation $y = -3x^2 - 12x - 4$.

## II.3 Exercices résolus

***Exercice II.3.1.*** ***Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).***
***Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x+1}$.***

***Solution*** *L'ensemble de définition de $f$ est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a :*

$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} -1 & 2 \end{array}$$

*Donc pour tout $x \in D_f$ :*

$$f(x) = \frac{2(x+1)-1}{x+1} = -\frac{1}{x+1} + 2.$$

*On en déduit que la courbe représentative de $f$, $\mathscr{C}_f$, est l'image de l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation : $y = -\frac{1}{x}$ ; par la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On en déduit le graphique de la figure II.4.* □

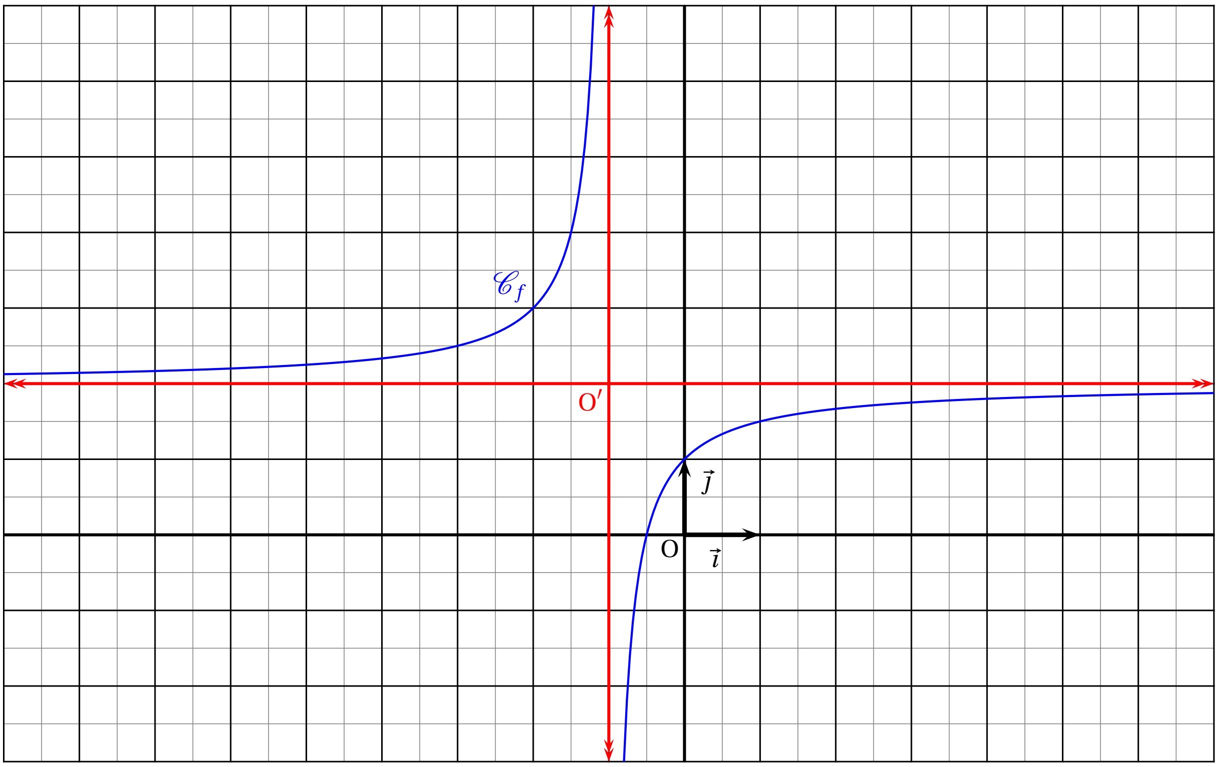



FIG. II.4 – Représentation graphique de $f$.

Pour représenter graphiquement une fonction homographique, on peut transformer son écriture en utilisant une division de fonctions affines puis en déduire la courbe par un argument de fonctions associées.

**Exercice II.3.2.** ***$m$ désigne un nombre réel. On considère les fonctions $f_m : x \mapsto mx+5m+3$ et $h : x \mapsto \dfrac{-x-2}{x+3}$ ainsi que leurs représentations graphiques respectives $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{H}$.***

***1. Déterminer, suivant les valeurs de $m$, le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{H}$.***

***2. Démontrer que les droites $\mathscr{D}_m$ concourent en un point A dont il conviendra de préciser les coordonnées.***

***3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$ (unité graphique : 1 cm).***

***Tracer $\mathscr{H}$, $\mathscr{D}_{-4}$, $\mathscr{D}_{-1}$ et $\mathscr{D}_0$.***

***Solution*** ***1.*** *Pour tout réel $m$, les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{H}$ sont les solutions de l'équation :*

$$f_m(x) = h(x) \qquad (\mathrm{E}_m)$$

*dont l'ensemble de validité est $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.*
*Les courbes $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{H}$ ont autant de points d'intersection que $(\mathrm{E}_m)$ a de solutions.*

$$\begin{aligned}
(\mathrm{E}_m) \quad &\iff \quad mx+5m+3 = \frac{-x-2}{x+3}\\
&\iff \quad mx^2+3mx+5mx+15m+3x+9 = -x-2\\
&\iff \quad mx^2+(8m+4)x+15m+11 = 0.
\end{aligned}$$

$(\mathrm{E}_0)$ *n'est pas une équation du second degré et :*

$$(\mathrm{E}_0) \quad \iff \quad 4x+11=0 \quad \iff \quad x = -\frac{11}{4}.$$

*Donc, pour $m=0$, $(\mathrm{E}_m)$ n'a qu'une solution et donc $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_0$ n'ont qu'un point d'intersection.*
*Pour $m \neq 0$, $(\mathrm{E}_m)$ est une équation du second degré et le nombre de ses solutions est déterminé par le signe de son discriminant :*

$$\Delta_m = (8m+4)^2 - 4m(15m+11) = 4\left((4m+2)^2 - 15m^2 - 11m\right) = 4\left(m^2+5m+4\right).$$

*$\Delta_m$ est du signe de $\left(m^2+5m+4\right)$. $\Delta = 25-4\times4 = 9$, donc $\Delta_m$ a deux racines : $m_1 = \dfrac{-5-3}{2} = -4$ et $m_1 = \dfrac{-5+3}{2} = -1$.*
*On en déduit le signe de $\Delta_m$ suivant les valeurs de $m$ :*

| $m$ | | $-4$ | | $-1$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta_m$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $+$ |

*D'où l'on tire que :*

- ***pour $m \in \{-4;-1;0\}$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_m$ n'ont qu'un point d'intersection ;***
- ***pour $m \in ]-4;-1[$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_m$ n'ont pas de point d'intersection ;***
- ***pour $m \in ]-\infty;-4[\cup]-1;0[\cup]0;+\infty[$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_m$ ont deux points d'intersection.***

*Un point* $A(x, y)$ *appartient à toutes les droites* $\mathscr{D}_m$ *si, et seulement si pour tout* $m \in \mathbb{R}$ *:* $y = mx + 5m + 3$. *Or :*

$$y = mx + 5m + 3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x+5)m + 3 - y = 0.$$

*On cherche donc $x$ et $y$ pour que le polynôme en $m$ :* $(x+5)m+3-y$ *; soit le polynôme nul. Cette condition est réalisée uniquement lorsque :*

$$\begin{cases} x+5=0 \\ 3-y=0 \end{cases}$$

*C'est-à-dire lorsque :* $(x; y) = (-5; 3)$.

$$\boxed{\textbf{\textit{Les droites }} \mathscr{D}_m \textbf{\textit{ concourent en }} \mathbf{A(-5;3)}}$$

**2.** *$\mathscr{D}_{-4}$, $\mathscr{D}_{-1}$ et $\mathscr{D}_0$ sont les droites d'équations respectives :* $y = -4x - 17$, $y = -x - 2$ *et* $y = 3$.
*De plus, pour tout $x \in D_h$, on a :* $h(x) = \dfrac{-x-2}{x+3} = \dfrac{-x-3+1}{x+3} = 1 + \dfrac{1}{x+3}$. *Donc $\mathscr{H}$ est l'image de l'hyperbole d'équation* $y = \dfrac{1}{x}$ *par la translation de vecteur* $-3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. *On déduit de cette étude la figure II.5.* □

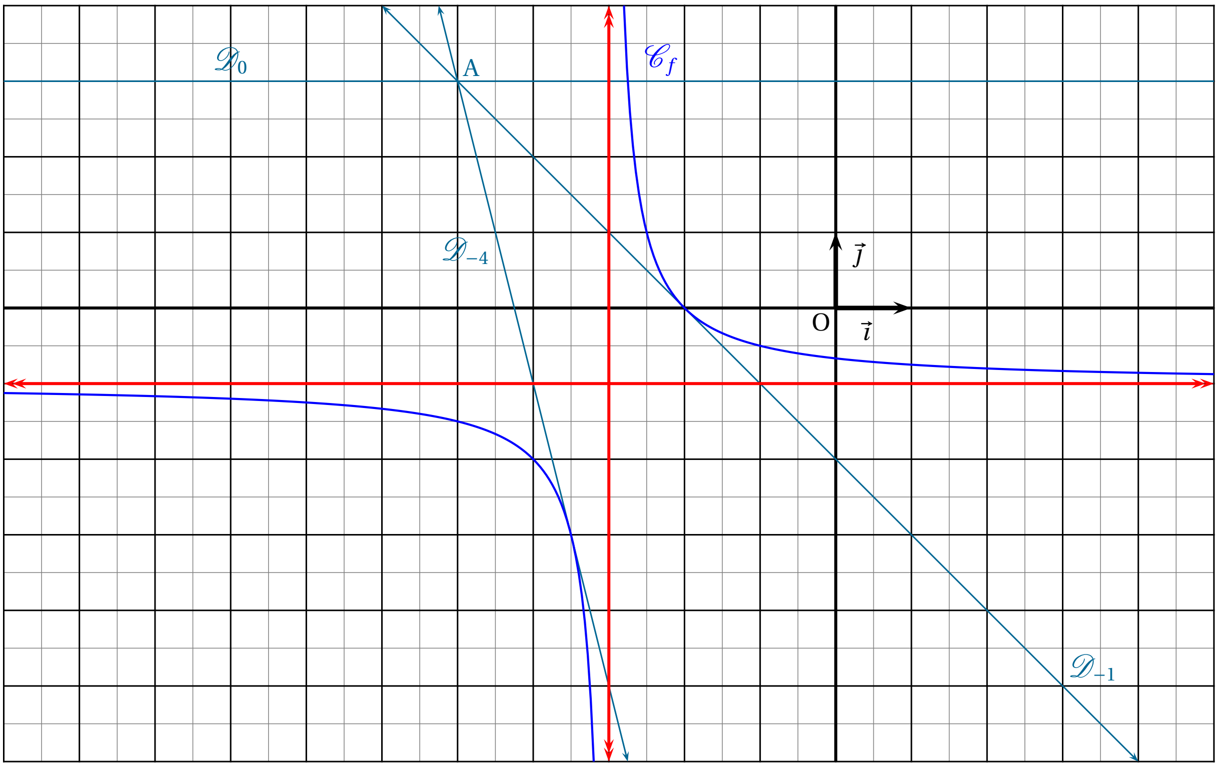



FIG. II.5 – Représentation graphique de $f$.

***Exercice II.3.3.*** ***Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).***
***On considère les fonctions $f : x \mapsto 2x+3$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{x+3}$ ainsi que leurs représentations graphiques respectives $\mathscr{D}$ et $\mathscr{H}$.***
***Déterminer algébriquement la position relative des courbes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{H}$ puis tracer ces deux courbes.***

***Solution*** *La position relative des courbes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{H}$ est déterminée par le signe de la fonction $f - h$ dont l'ensemble de définition est :* $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. *Pour tout réel $x$ :*

$$(f-h)(x) = 2x+3 - \frac{1}{x+3} = \frac{(2x+3)(x+3)-1}{x+3} = \frac{2x^2+9x+8}{x+3}.$$

*Calculons le discriminant du numérateur :* $\Delta = 81 - 4 \times 16 = 17$.
*Donc le numérateur a deux racines :*

$$x_1 = \frac{-9-\sqrt{17}}{4} \qquad \textit{et} \qquad x_2 = \frac{-9+\sqrt{17}}{4}.$$

*On en déduit le signe de $f-h$ :*

| $x$ | | $\frac{-9-\sqrt{17}}{4}$ | | $-3$ | | $\frac{-9+\sqrt{17}}{4}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2+9x+8$ | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $+$ | $0$ | $+$ |
| $x+3$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ |
| $(f-h)(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ |

*D'où l'on tire que :*

- ***$\mathscr{D}$ et $\mathscr{H}$ se coupent aux points d'abscisse $\frac{-9-\sqrt{17}}{4}$ et $\frac{-9+\sqrt{17}}{4}$.***
- ***pour $x \in \left]\frac{-9-\sqrt{17}}{4};-3\right[ \cup \left]\frac{-9+\sqrt{17}}{4};+\infty\right[$, $\mathscr{D}$ est au-dessus de $\mathscr{H}$;***
- ***pour $x \in \left]-\infty;\frac{-9-\sqrt{17}}{4}\right[ \cup \left]-3;\frac{-9+\sqrt{17}}{4}\right[$, $\mathscr{D}$ est au-dessous de $\mathscr{H}$.***

*De plus $\mathscr{H}$ est l'image de l'hyperbole d'équation $y=\frac{1}{x}$ par la translation de vecteur $-3\vec{\imath}$. On déduit de cette étude la figure II.6.* □

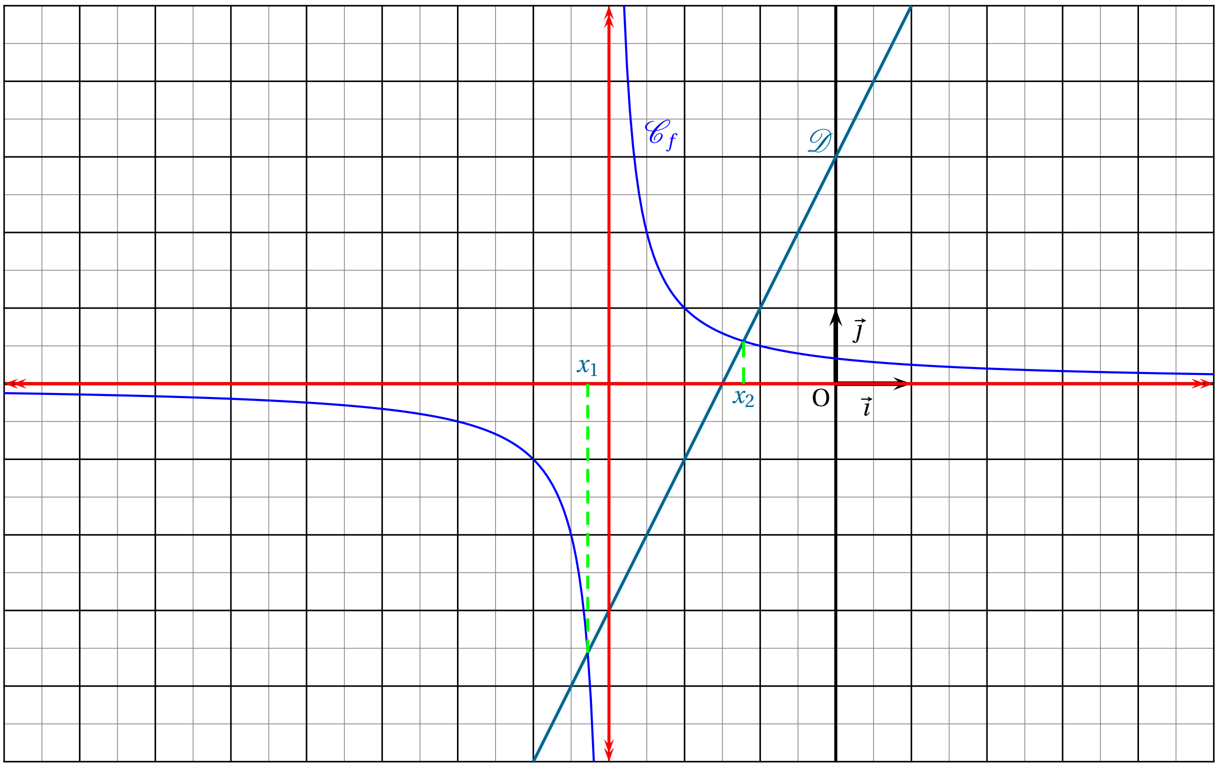



FIG. II.6 – Représentation graphique de $f$.

# Chapitre III

# Repérage

Soit $\lambda$ un nombre réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur, désormais $\dfrac{\vec{u}}{\lambda}$ désignera le vecteur : $\dfrac{1}{\lambda}\vec{u}$.

## III.1 Repères cartésiens

Les coordonnées cartéiennes sont parfois appelées coordonnées rectangulaires.

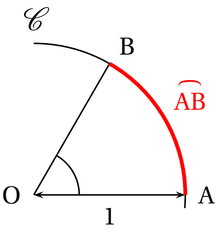
### III.1.1 Repère d'une droite

Soit (D) une droite, A un point de (D) et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D).

## III.2 Le radian

### III.2.1 Définition

Une unité de longueur a été choisie. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon 1 et A, B deux points de $\mathscr{C}$. La mesure en *radian*(s) de $\widehat{AOB}$ est la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
La longueur d'un demi-cercle de rayon 1 est $\pi$ donc un angle plat mesure $\pi$ rad.
On déduit de même le tableau de conversion suivant.




$\times\dfrac{180}{\pi}$

| degrés | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 180 | 270 | 360 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| radians | 0 | $\dfrac{\pi}{6}$ | $\dfrac{\pi}{4}$ | $\dfrac{\pi}{3}$ | $\dfrac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\dfrac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |

$\times\dfrac{\pi}{180}$

### III.2.2 Conversion

Pour convertir des degrés en radians ou des radians en degrés, il suffit de savoir que :

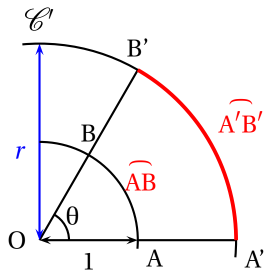
$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

On déduit immédiatement de cette égalité :

$$1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi}\text{degrés} \qquad \text{et} \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

***Exemple*** $36^\circ = 36 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{5}\ rad\,;\ \dfrac{3\pi}{5}\ rad = \dfrac{3}{5} \times 180 = 108^\circ$.

### III.2.3 Longueur d'un arc de cercle




Soit $\mathscr{C}'$ un cercle de centre O et de rayon $r$ et A′, B′ les points d'intersection respectifs des demi-droites [OA) et [OB) avec $\mathscr{C}'$ et θ la mesure en radian(s) de $\widehat{AOB}$. L'arc $\overset{\frown}{A'B'}$ est l'image de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ par un grossissement de rapport $r$ donc : longueur$\left(\overset{\frown}{A'B'}\right) = r$ longueur$\left(\overset{\frown}{AB}\right)$.

Or, par définition du radian : $\theta =$ longueur$\left(\overset{\frown}{AB}\right)$ ; donc : longueur$\left(\overset{\frown}{A'B'}\right) = r\theta$.

Nous en déduisons le théorème suivant.

**Théorème III.2.1**

Dans un cercle de rayon, $r$, la longueur, $\ell$, d'un arc intercepté par un angle au centre de mesure, θ rad, vérifie :

$$\ell = r\,\theta.$$

***Exemple*** *Un angle droit mesure* $\frac{\pi}{2}$ *rad, donc le quart d'un cercle de rayon* 8 *a pour longueur :* $8 \times \frac{\pi}{2} = 4\pi$.

### III.2.4 Exercices

**Définition du radian**

**III.2.a.** **1.** Convertir en radian(s) : 20°, 40°, 80°, 120°, 180° et 270°.

**III.2.b.** **1.** Convertir en degrés : $\frac{\pi}{6}$ rad, $\frac{2\pi}{5}$ rad, $\frac{\pi}{8}$ rad, $\frac{2\pi}{3}$ rad, $\frac{3\pi}{10}$ rad, $\frac{3\pi}{4}$ rad, $\frac{5\pi}{6}$ rad, $\frac{7\pi}{6}$ rad, $\frac{\pi}{12}$ rad et $\frac{5\pi}{10}$ rad.

**Longueur d'un arc**

**III.2.c.** Calculer la longueur d'un arc de cercle de rayon 3 intercepté par un angle au centre mesurant $\frac{2\pi}{3}$ rad.

**III.2.d.** Calculer la longueur d'un arc de cercle de rayon 4 intercepté par un angle au centre mesurant $\frac{2\pi}{5}$ rad.

**III.2.e.** Calculer la longueur d'un arc de cercle de rayon 5 intercepté par un angle inscrit mesurant $\frac{3\pi}{4}$ rad.

**Mesure d'un angle**

**III.2.f.** Dans un cercle de rayon 4, déterminer la mesure en radian(s) puis en degrés de l'angle au centre interceptant un arc de longueur $\frac{3}{2}$.

**III.2.g.** Dans un cercle de rayon 5, déterminer la mesure en radian(s) puis en degrés de l'angle au centre interceptant un arc de longueur 3.

**Calcul du rayon**

**III.2.h.** Dans un cercle, un angle au centre de $\frac{5\pi}{6}$ rad intercepte un arc de longueur 6.
Déterminer le rayon du cercle.

**III.2.i.** Dans un cercle, un angle inscrit de $\frac{5\pi}{6}$ rad intercepte un arc de longueur 6.
Déterminer le rayon du cercle.

## III.3 Angles orientés

L'objectif de cette section est d'introduire le concept d'angle orienté et de préciser ce qu'est une mesure d'un angle orienté.

### III.3.1 Orientation du plan

Orienter le plan, c'est choisir un sens positif, ou direct, de parcours des cercles du plan. Par convention on choisit le sens trigonométrique, c'est-à-dire le sens contraire des aiguilles d'une montre, comme sens positif. Ainsi, dans la figure III.1, ABC est un triangle de *sens direct* alors que DEF est un triangle de *sens indirect*. Le triangle ACB est orienté dans le sens indirect.

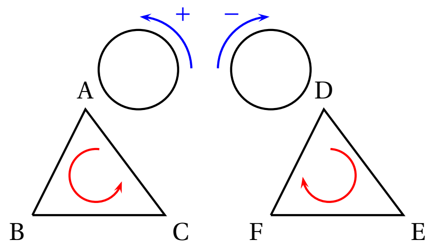



Fig. III.1 – Orientations du plan

Un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est dit orthonormé lorsqu'il est orthogonal $(\vec{\imath} \perp \vec{\jmath})$ et normé[1] $(\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1)$.
Sur la figure III.2 le triangle OIJ est direct alors que le triangle ABC est indirect. On dira que le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est direct et que le reprère $\left(A;\vec{b},\vec{c}\right)$ est indirect.

[1] Les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont alors dits *unitaires*


le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$ est orthonormé direct

le repère $\left(A;\vec{b},\vec{c}\right)$ est orthonormé indirect

FIG. III.2 – Repères orthonormés.

Dans tout ce chapitre le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$, et l'unité de mesure des angles est le radian.

## III.3.2 Introduction

L'objet de ce paragraphe est de donner un aperçu des notions qui seront définies dans les paragraphes suivants.
En collège on utilise l'angle géométrique, c'est-à-dire l'écartement entre deux demi-droites de même origine.
Sur la figure III.3, nous avons : $\widehat{AOB} = \widehat{BOA}$ et $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{AOC}$.
Ce formalisme est souvent pratique, mais il a ses limites.
Par exemple on aimerait pouvoir affirmer que la rotation de centre O et d'angle 60° dans le sens négatif est la rotation de centre O et d'angle −60°. Ainsi les rotations de centre O et d'angles 60° et −60° $\left(-\frac{\pi}{3}\text{ rad et }\frac{\pi}{3}\text{ rad}\right)$ seraient réciproques l'une de l'autre.
Pour légitimer une telle affirmation, nous introduirons un nouveau type d'angle : l'angle orienté. L'angle orienté sera l'écartement entre deux vecteurs.

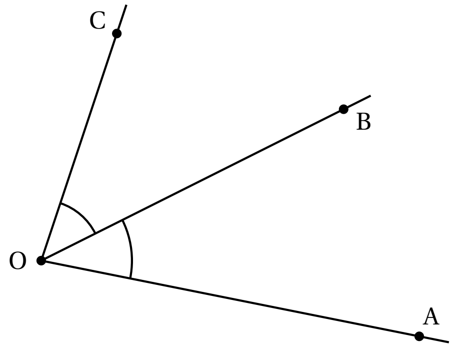



FIG. III.3 – Angles géométriques

Sur la figure III.4, ABC est un triangle équilatéral orienté dans le sens direct, donc : $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$ rad.

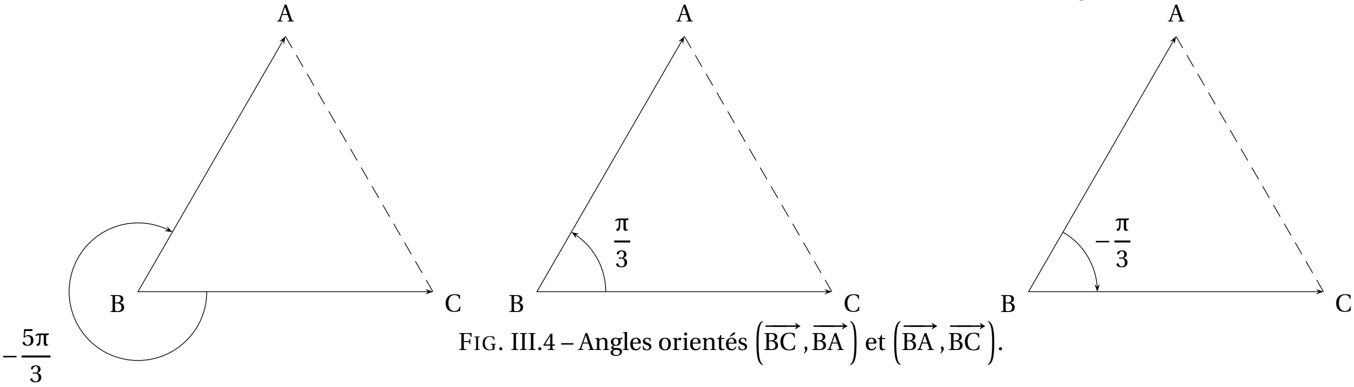



FIG. III.4 – Angles orientés $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$.

Sur les deux premiers triangles, la flèche va du vecteur $\overrightarrow{BC}$ au vecteur $\overrightarrow{BA}$, elle symbolisera donc l'angle $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$. Sur le dernier triangle , la flèche va du vecteur $\overrightarrow{BA}$ au vecteur $\overrightarrow{BC}$, elle symbolisera donc l'angle $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$.
Les angles $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$ sont dits opposés. Nous pourrons donc écrire : $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = -\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$.
Dans les deux premiers triangles, $\frac{\pi}{3}$ rad (c'est-à-dire 60°) et $-\frac{5\pi}{3}$ rad (c'est-à-dire −300°) sont deux mesures de $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$ ; nous pourrons écrire, par abus de langage : $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{3}$ et $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right) = -\frac{5\pi}{3}$ ; pourtant : $\frac{\pi}{3} \neq -\frac{5\pi}{3}$.
Dans le dernier triangle : $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = -\frac{\pi}{3}$. Plus généralement, certaines remarques s'imposent.

***Remarques***

***1.*** *Un angle orienté a plusieurs mesures en radians.*

***2.*** *Deux angles opposés on des mesures opposées.*

***Exemple*** *Sur la figure III.2 nous constatons qu'il y a deux angles droits orientés : l'angle droit direct (de mesure $\frac{\pi}{2}$ et représenté par $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$) et l'angle droit indirect (de mesure $-\frac{\pi}{2}$ et représenté par $(\vec{b},\vec{c})$).*

Nous déduisons de cet exemple qu'il existe deux type de repères orthonormés :

1. Les repères orthonormés directs. Le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$ est direct lorsque $(\vec{\imath},\vec{\jmath}) = \frac{\pi}{2}$.

2. Les repères orthonormés indirects. Le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$ est indirect lorsque $(\vec{\imath},\vec{\jmath}) = -\frac{\pi}{2}$.

Étant donné un angle orienté, deux questions se poseront naturellement, combien a-t-il de mesures ? quelles sont-elles ?

### III.3.3 Image d'un nombre réel sur le cercle trigonométrique

le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.

**DÉFINITION III.3.1**

Le cercle trigonométrique, qui sera noté U, est le cercle de centre O et de rayon 1.

***Remarque*** *Un point M est donc un point de U si, et seulement si* $\overrightarrow{OM}$ *est un vecteur unitaire.*

Dans la suite A, A', B et B' seront les points de coordonnées respectives (1;0), (−1;0), (0;1) et (0;−1). La droite (T) sera la tangente à U en A. On la munit du repère $\left(O;\vec{\jmath}\right)$. La droite (T) ainsi graduée représente l'ensemble $\mathbb{R}$ et l'assimile à un fil inextensible et sans épaisseur. On enroule l'ensemble $\mathbb{R}$ ainsi représenté sur le cercle trigonométrique en tournant dans le sens positif pour les nombres positifs et dans le sens négatif pour les nombres négatifs. À tout nombre réel $x$, on associe ainsi un point M de U.

***Exemples***

***1.*** *0 a pour image A ;*

***2.*** *Un quart de cercle trigonométrique a pour longueur,* $\frac{\pi}{2}$, *donc* $\frac{\pi}{2}$ *a pour image* B *et* $-\frac{\pi}{2}$ *a pour image* $B'$ *;*

***3.*** *Un demi-cercle trigonométrique a pour longueur,* $\pi$*, donc* $\pi$ $-\pi$ *ont pour image* $A'$ *;*

***4.*** *U est un cercle de rayon* 1*, il a donc pour circonférence* $2\pi$ *; donc* $2\pi$ *et* $-2\pi$ *ont pour image* A *;*

***5.*** *plus généralement, tous les nombres de la forme,* $k2\pi$ *(avec* $k \in \mathbb{Z}$*) ont pour image A ;*

***6.*** *réciproquement on obtient ainsi tous les antécédents de* A *;*

***7.*** *les nombres* $x$ *et* $x+2\pi$ *sont a une distance de* $2\pi$ *l'un de l'autre, leurs images seront donc écartées l'une de l'autre d'un tour : les nombres* $x$ *et* $x+2\pi$ *ont tous deux pour image* M *;*

***8.*** *plus généralement les nombres qui ont pour image M sont les nombres de la forme :* $x+k2\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$ *;*

***9.*** *en particulier, les nombres qui ont pour image B sont les nombres de la forme :* $\frac{\pi}{2}+k2\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$ *;*

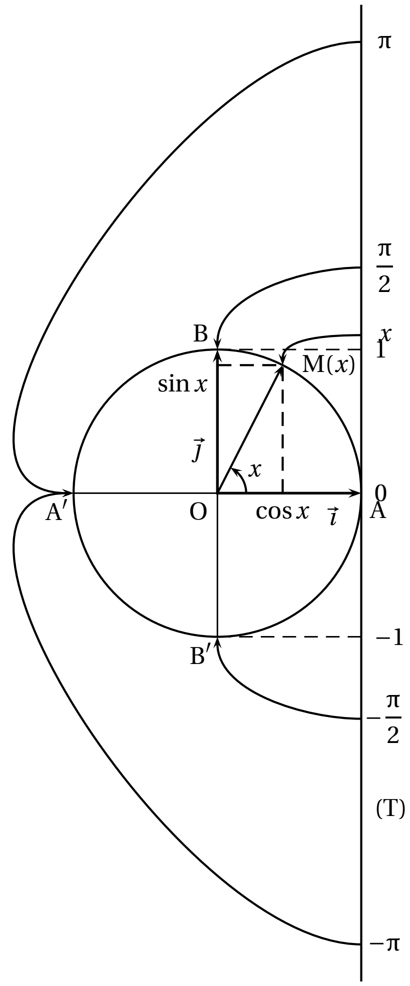



FIG. III.5 – Image d'un réel sur le cercle trigonométrique.

Nous déduisons des ces considérations le théorème suivant.

**THÉORÈME III.3.1**

Pour tout nombre réel $x$ et nombre entier $k$ : les nombres $x$ et $x+k2\pi$ ont la même image sur U.

**DÉFINITIONS III.3.2**

Soit $x$ un nombre réel et M son image sur U. le cosinus et le sinus de $x$ , noté respectivement $\cos x$ et $\sin x$, sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M.

***Remarque*** *La définition ci-dessus est cohérente avec les définitions du cosinus et du sinus d'un angle d'un triangle rectangle vues au collège. En effet, au collège, le cosinus ou le sinus d'un angle géométrique est défini lorsque la mesure de cet angle est comprise entre* $0^\circ$ *et* $90^\circ$*, c'est-à-dire entre* 0 *rad et* $\frac{\pi}{2}$*rad. Or, pour* $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$*, le point M est dans le premier cadran. Désignons par P et Q les projetés orthogonaux respectifs du point M sur les axes (OA) et (OB) ; le quadrilatère OPMQ a trois angles droits (en O, P et Q) c'est donc un rectangle. Dans le triangle POM, rectangle en P, nous avons alors :*

$$\cos\widehat{\mathrm{POM}} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OM}} = \mathrm{OP} = \cos x \quad \textit{et} \quad \sin\widehat{\mathrm{POM}} = \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{OM}} = \mathrm{PM} = \mathrm{OQ} = \sin x$$

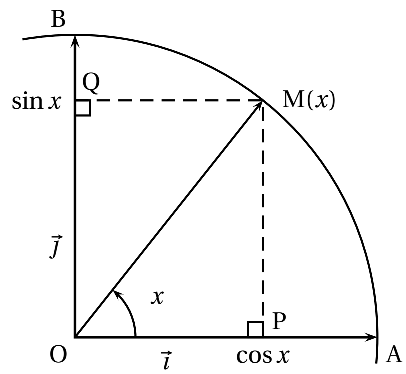


FIG. III.6 – U dans le 1er cadran.

Nous avons : OM = 1 ; donc : $\mathrm{OM}^2 = 1$. De plus les coordonnées de M sont toutes deux comprises entre −1 et 1, en appliquant de plus le théorème III.3.1, nous en déduisons le théorème suivant.

**THÉORÈME III.3.2**

Pour tout nombre réel $x$ et tout entier $k$ :

**(1)** $\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

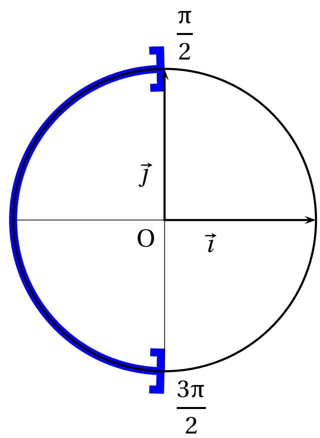
**(2)** $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1.$

**(3)** $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1.$

**(4)** $\cos(x + k2\pi) = \cos x.$

**(5)** $\sin(x + k2\pi) = \sin x.$

***Exercice III.3.1.*** ***$x$ est un élément $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ et $\sin x = \frac{5}{13}$. Déterminer $\cos x$.***




***Solution*** *Nous avons :* $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} = \left(\frac{12}{13}\right)^2$ ;

*donc :* $\cos x = \frac{12}{13}$ *ou* $\cos x = -\frac{12}{13}$.

*De plus :* $x \in \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ *; donc (voir graphique ci-contre)* $\cos x$ *est négatif ;*

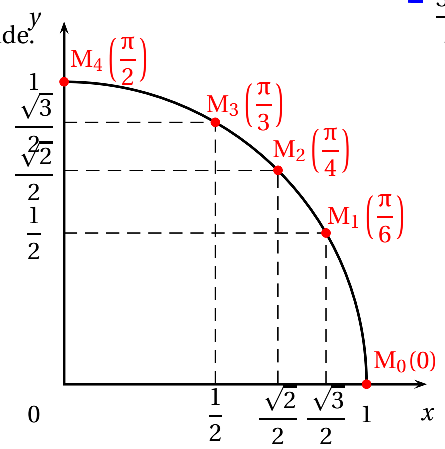
*donc :*

$$\boldsymbol{\cos x = -\frac{12}{13}}.$$

□

Les valeurs particulières suivantes ont été vues en classe de seconde.

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\tan x$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | non déf. |




### III.3.4 Mesures d'un angles orienté

Les définitions III.3.3 se déduisent de l'étude précédente.

**DÉFINITIONS III.3.3**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit $x$ et $x'$ deux nombres réels et M et M′ leurs images respectives sur U.

**(1)** Les mesures de l'angle $\left(\vec{\imath},\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ sont les nombres de la forme $x + k2\pi$ où $k$ est un entier relatif..

**(2)** Les mesures de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}},\overrightarrow{\mathrm{OM}'}\right)$ sont les nombres de la forme $x' - x + k2\pi$ où $k$ est un entier relatif.

***Notations et vocabulaire*** *Par abus de langage on peut écrire :* $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OM'}}\right) = x' - x$.
*La notation suivante est rigoureuse :*

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OM'}}\right) = x' - x + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

*Cette assertion peut également s'écrire en termes de congruences :* $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OM'}}\right) \equiv x' - x \mod 2\pi$ *ou* $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OM'}}\right) = x' - x \pmod{2\pi}$ *ou encore* $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OM'}}\right) \equiv x' - x \ (2\pi)$.
*Ces dernières formules se lisent toutes :*
*«* $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OM'}}\right)$ *est congru à* $x' - x$ *modulo* $2\pi$ *».*

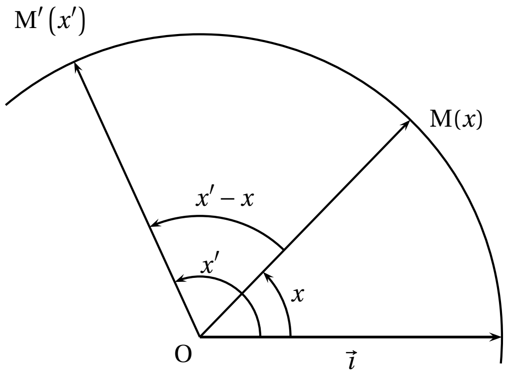



FIG. III.7 – Mesure d'un angle orienté entre deux vecteurs unitaires.

***Remarque*** *Les définitions III.3.3 sont indépendantes de mesures* $x$ *et* $x'$ *choisies. En effet, soit* $y$ *et* $y'$ *deux autres mesures respectives , des angles* $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ *et* $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{\mathrm{OM'}}\right)$*. Il existe deux entiers* $k'$ *et* $k''$ *tels que :* $y = x + k'2\pi$ *et* $y' = x' + k''2\pi$*. Posons :* $k = k'' - k'$*. Nous avons alors :* $y' - y = (x' + k''2\pi) - (x + k'2\pi) = x' - x + (k'' - k')2\pi = x' - x + k2\pi$ *; donc* $x' - x$ *et* $y' - y$ *sont deux mesures d'un même angle puisqu'elles diffèrent d'un multiple entier de* $2\pi$*. Nous pouvons écrire :* $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OM'}}\right) = y' - y$.

La définition III.3.3 précise les mesures de l'angle orienté entre deux vecteurs unitaires. Il faut maintenant définir les mesures d'un angles $(\vec{u}, \vec{v})$ entre deux vecteurs non nuls.

**DÉFINITION III.3.4**
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tous non nuls et $x$ et $x'$ deux nombres réels dont les images respectives sur U, M et M′, vérifient : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM'}} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.
Les mesures de $(\vec{u}, \vec{v})$ sont les mesures de $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OM'}}\right)$ ; c'est-à-dire les nombres réels de la forme : $x' - x + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

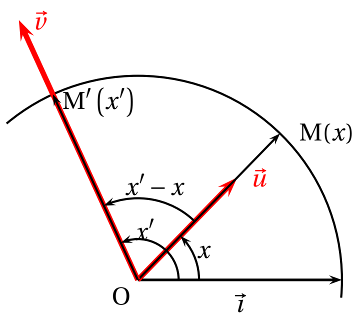



FIG. III.8 – Mesure d'un angle orienté.

***Remarques***
***1.*** *Le vecteur* $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ *(respectivement* $\overrightarrow{\mathrm{OM'}}$ *) est le vecteur unitaire de même direction et de même sens que* $\vec{u}$ *(respectivement* $\vec{v}$*).*
***2.*** *Si l'un au moins des deux vecteurs est nul, alors l'angle* $(\vec{u}, \vec{v})$ *n'est pas défini.*
***3.*** *Dans le cas ou les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont unitaires, les définitions III.3.3 et III.3.4 coïncident, la définition III.3.4 est donc une extension de la définition III.3.3.*

***Exemple*** *Dans la figure III.4 :* $\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{BA}}\right) = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ *; en faisant varier* $k$ *de* $-2$ *à* $2$ *nous en déduisons que :* $-\frac{11\pi}{3}$ ; $-\frac{5\pi}{3}$ ; $\frac{\pi}{3}$ ; $\frac{7\pi}{3}$ ; $\frac{13\pi}{3}$ *; sont des mesures en radians de* $\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{BA}}\right)$.

On aimerait légitimer les expressions du type : « l'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{3}$ ».

**DÉFINITION III.3.5 ÉGALITÉ DE DEUX ANGLES ORIENTÉS**
Deux angles orientés égaux sont deux angles orientés qui ont les mêmes mesures.

***Remarque*** *Cette définition implique, entre autre, qu'un angle orienté est déterminé par l'une de ces mesures.*

***Exemple*** *Dans la figure III.4,* $\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{BA}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}}\right)$ *sont des représentants de l'angle orienté dont l'une des mesures est* $\frac{\pi}{3}$ *rad.*

On déduit de la définition III.3.4 le théorème suivant.

**Théorème III.3.3**

Soit $x$ et $x'$ deux nombres réels. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $x$ et $x'$ sont des mesures en radians d'un même angle orienté
2. $x$ et $x'$ ont la même image sur le cercle trigonométrique
3. $x' - x$ est un multiple entier de $2\pi$
4. $x \equiv x' \pmod{2\pi}$

***Exemple*** *Considérons les nombres $x$ et $x'$ définis par : $x = \dfrac{2731\pi}{6}$ et $x' = -\dfrac{5\pi}{6}$. On a :*

$$x - x' = \frac{2731\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{2736\pi}{6} = 456\pi = 228 \times 2\pi \qquad \text{avec } 228 \in \mathbb{Z}.$$

*Donc $x$ et $x'$ ont la même image sur U, ce sont deux mesures d'un même angle orienté et : $\dfrac{2731\pi}{6} \equiv -\dfrac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}$.*

On passe d'une mesure d'un angle orienté à la suivante en ajoutant $2\pi$ et $]-\pi, \pi]$ est un intervalle d'amplitude $2\pi$ ; donc tout angle orienté a une mesure et une seule dans cet intervalle. Nous légitimons ainsi la définition suivante.

**Définition III.3.6**

La mesure principale (en radians) d'un angle orienté est celle qui est dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

***Notations et vocabulaire***

- *L'angle nul est l'angle dont la mesure principale est 0 ;*
- *l'angle plat est l'angle dont la mesure principale est $\pi$ ;*
- *l'angle droit direct (respectivement indirect) est l'angle dont la mesure principale est $\dfrac{\pi}{2}$ (respectivement $-\dfrac{\pi}{2}$).*

Le théorème suivant est immédiat.

**Théorème III.3.4**

**(1)** Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens si, et seulement si : $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

**(2)** Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires si, et seulement si : $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$

***Remarque*** *Soit A, B, C trois points non alignés et $\theta$ la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.*

- *le triangle ABC est orienté dans le sens direct si, et seulement si, $\theta \in ]0; \pi[$ ;*
- *le triangle ABC est orienté dans le sens indirect si, et seulement si, $\theta \in ]-\pi; 0[$ ;*

Le théorème suivant est une conséquence immédiate des définitions III.3.4, III.3.5 et III.3.6.

**Théorème III.3.5**

**(1)** Pour que deux angles orientés soient égaux , il suffit qu'ils aient une mesure en commun.

**(2)** Pour que deux angles orientés soient égaux , il suffit qu'ils aient la même mesure principale.

***Remarque*** ***(2)*** *est un cas particulier de* ***(1)***

Un angle a pour mesure en radians : $\dfrac{1715\pi}{6}$. Déterminons sa mesure principale.

La mesure connue est un multiple entier de $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$ est la mesure d'un douzième de tour. On a donc l'idée de diviser 1715 par 12.

$$\begin{array}{r|l} 1\,7\,1\,5 & 1\,2 \\ \cline{2-2} 5\,1\phantom{\,5} & 1\,4\,2 \\ 3\,5 & \\ 1\,1 & \end{array}$$

Ainsi :

$$1715 = 142 \times 12 + 11.$$

Multiplions membre à membre cette égalité par $\dfrac{\pi}{6}$, il vient :

$$\frac{1715\pi}{6} = 142 \times 2\pi + \frac{11\pi}{6}.$$

Mais $\dfrac{11\pi}{6}$ n'est pas une mesure principale d'angle orienté, on écrit donc :

$$\frac{1715\pi}{6} = 143 \times 2\pi - \frac{\pi}{6}.$$

$$\textbf{L'angle a pour mesure principale} : -\frac{\pi}{6} \textbf{ rad}$$

***Exercice III.3.2.*** ***On donne : $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1789\pi}{4}$. Déterminer la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$.***

***Solution*** *On a :* $\frac{1789\pi}{4} = \frac{1789}{8} \times 2\pi$.

$$\begin{array}{r|l} 1\ 7\ 8\ 9 & 8 \\ \cline{2-2} 1\ 8\phantom{\ 9} & 2\ 2\ 3 \\ 2\ 9 & \\ 5 & \end{array}$$

*Donc :*

$$1789 = 223 \times 8 + 5;$$

*d'où :*

$$\frac{1789\pi}{4} = 223 \times 2\pi + \frac{5\pi}{4};$$

*mais* $\frac{5\pi}{4} \notin ]-\pi;\pi]$ *et* $\left(\frac{5\pi}{4} - 2\pi\right) \in ]-\pi;\pi]$, *donc :*

$$\frac{1789\pi}{4} = 224 \times 2\pi - \frac{3\pi}{4}.$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \textit{ a pour mesure principale} : -\frac{3\pi}{4} \textit{ rad}$$

□

**Théorème III.3.6**

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels strictement positifs $k$ et $k'$ on a : $(\vec{u}, \vec{v}) = \left(k\vec{u}, k'\vec{v}\right)$

**Démonstration** Introduisons les points M et M′, comme dans la définition III.3.3. D'une part les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction et le même sens que $\overrightarrow{OM}$, d'autre part les vecteurs $\vec{v}$ et $k\vec{v}$ ont la même direction et le même sens que $\overrightarrow{OM'}$ ; donc, d'après la définition III.3.3, les angles $(\vec{u}, \vec{v})$ et $\left(k\vec{u}, k'\vec{v}\right)$ ont les mêmes mesures que $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$ ; puis, d'après la définition III.3.4, ces trois angles sont égaux. □

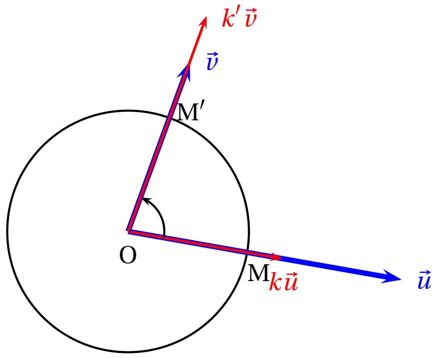



Fig. III.9 – $(\vec{u}, \vec{v}) = \left(k\vec{u}, k'\vec{v}\right)$.

### III.3.5 Somme de deux angles orientés

Puisqu'un angle orienté est déterminé par l'une de ses mesures, il semble légitime que la somme de l'angle de $\frac{\pi}{3}$ rad et de l'angle de $\frac{\pi}{4}$ rad soit l'angle de $\frac{7\pi}{12}$ rad.

**Définition III.3.7**

La somme de l'angle de mesure $\alpha$ rad et de l'angle de mesure $\beta$ rad est l'angle de mesure $(\alpha + \beta)$ rad

***Remarque*** *Comme dans la remarque consécutive à la définition III.3.3, cette définition est indépendant des mesures choisie.*

***Exemple*** *Considérons deux angles* $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}\right)$ *et* $\left(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v_2}\right)$ *tels que :* $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}\right) = \frac{2\pi}{7}$ *et* $\left(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v_2}\right) = \frac{3\pi}{7}$.

*On a donc :* $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}\right) + \left(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v_2}\right) = \frac{5\pi}{7}$.

*Mais on a aussi :* $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}\right) = \frac{2\pi}{7} + 2 \times 2\pi$ *et* $\left(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v_2}\right) = \frac{3\pi}{7} + 3 \times 2\pi$ *; donc :* $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}\right) + \left(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v_2}\right) = \frac{5\pi}{7} + 5 \times 2\pi$.

*Les nombres* $\frac{5\pi}{7}$ *et* $\frac{5\pi}{7} + 5 \times 2\pi$ *sont bien deux mesures d'un même angle puisqu'ils diffèrent d'un multiple entier de* $2\pi$.

**THÉORÈME III.3.7 RELATION DE CHASLES**

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ :

$$(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w}).$$

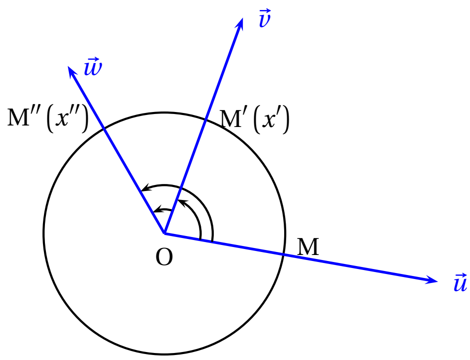



FIG. III.10 – Relation de Chasles.

**Démonstration** Soit $x$, $x'$ et $x''$ des nombres ayant respectivement pour images sur U les points M, M′, M″ tels que :
$\overrightarrow{OM}=\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ ; $\overrightarrow{OM'}=\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ ; $\overrightarrow{OM''}=\dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$.
D'après le théorème III.3.6 et la définition III.3.7 :

$$\begin{aligned}(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w}) &= \left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right)+\left(\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OM''}\right)\\ &= \left(x'-x\right)+\left(x''-x'\right)\\ &= x''-x\\ &= \left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM''}\right)\\ &= (\vec{u},\vec{w})\end{aligned}$$

□

**DÉFINITION III.3.8**

Deux angles opposés sont deux angles dont la somme est nulle.

**THÉORÈME III.3.8**

Soit $(\vec{u},\vec{v})$ un angle. $(\vec{u},\vec{v})$ n'a qu'un opposé : $(\vec{v},\vec{u})$.

**Démonstration** Soit $x$ une mesure de $(\vec{u},\vec{v})$, d'après la définition III.3.7, les opposés de $(\vec{u},\vec{v})$, sont les angles de mesure $-x$ et il n'y en a qu'un.
D'après la relation de Chales (théorème III.3.7) et le théorème III.3.4 : $(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{u})=(\vec{u},\vec{u})=0$. □

***Notations et vocabulaire*** *L'opposé de* $(\vec{u},\vec{v})$ *est noté* $-(\vec{u},\vec{v})$.
*Soustraire un angle, c'est ajouté son opposé, ainsi :* $(\vec{u},\vec{v})-\left(\vec{w},\vec{t}\right)=(\vec{u},\vec{v})+\left(\vec{t},\vec{w}\right)$.

On déduit de ces considérations et des valeurs remarquables vus en classe de seconde les valeurs remarquables suivantes.

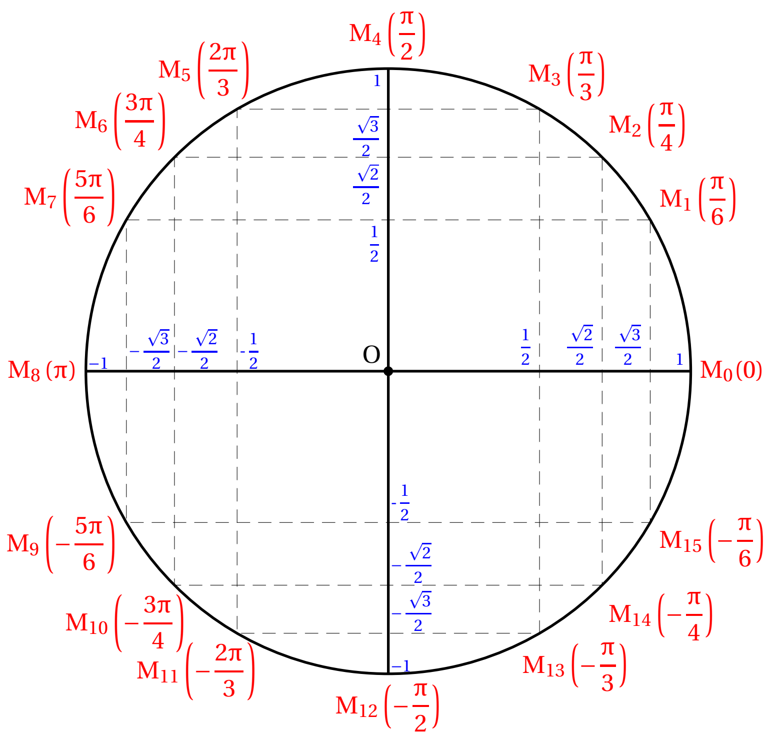



FIG. III.11 – Valeurs remarquables de sin et cos.

### III.3.6 Exercices

#### Image d'un nombre sur U

**III.3.a.** Placer sur le cercle trigonométrique les images des nombres suivants : $\frac{\pi}{3}$ ; $\frac{\pi}{4}$ ; $\frac{\pi}{6}$ ;

**III.3.b.** Placer sur le cercle trigonométrique les images des nombres suivants : $-\frac{\pi}{3}$ ; $-\frac{\pi}{4}$ ; $-\frac{\pi}{6}$ ;

**III.3.c.** Placer sur le cercle trigonométrique les images des nombres suivants : $\frac{2\pi}{3}$ ; $\frac{3\pi}{4}$ ; $\frac{5\pi}{6}$ ;

**III.3.d.** Placer sur le cercle trigonométrique les images des nombres suivants : $-\frac{2\pi}{3}$ ; $-\frac{3\pi}{4}$ ; $-\frac{5\pi}{6}$ ;

**III.3.e.** Placer sur le cercle trigonométrique les images des nombres suivants : $\frac{5\pi}{3}$ ; $\frac{7\pi}{4}$ ; $\frac{25\pi}{6}$ ;

**III.3.f.** Les nombres $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{1789\pi}{3}$ ont-ils la même image sur le cercle trigonométrique ?

**III.3.g.** Les nombres $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{1789\pi}{4}$ ont-ils la même image sur le cercle trigonométrique ?

**III.3.h.** Les nombres $\frac{1492\pi}{7}$ et $\frac{2008\pi}{7}$ ont-ils la même image sur le cercle trigonométrique ?

#### recherche de $\cos x$ ou $\sin x$

**III.3.i.** $x$ est un élément $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ et $\sin x = -\frac{3}{5}$.
Déterminer $\cos x$.

**III.3.j.** $x$ est un élément $[-\pi, 0]$ et $\cos x = -\frac{3}{4}$.
Déterminer $\sin x$.

**III.3.k.** **1.** Développer : $\left(1+\sqrt{5}\right)^2$.

**2.** $x$ est un élément $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin x = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.
Déterminer $2\cos x$.

#### Mesures d'un angle orienté

**III.3.l.** Parmi les nombres suivant, quels sont ceux qui sont la mesure principale en radians d'un angle orienté ?
$-\frac{2\pi}{3}$, $-3$, $100$, $-\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, $\frac{4\pi}{3}$.

**III.3.m.** Les nombres $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{1789\pi}{3}$ sont-ils des mesures en radians d'un même angle orienté.

**III.3.n.** Les nombres $\frac{2008\pi}{9}$ et $\frac{1790\pi}{9}$ sont-ils des mesures en radians d'un même angle orienté ?

**III.3.o.** Les nombres $\frac{814\pi}{13}$ et $\frac{1945\pi}{13}$ sont-ils des mesures en radians d'un même angle orienté ?

**III.3.p.** M est l'image sur U de $\frac{1904\pi}{3}$.
Déterminer la mesure principale de $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$ et placer le point M.

**III.3.q.** M est l'image sur U de $\frac{2061\pi}{6}$.
Déterminer la mesure principale de $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$ et placer le point M.

**III.3.r.** M est l'image sur U de $\frac{1903\pi}{4}$.
Déterminer la mesure principale de $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$ et placer le point M.

## III.4 Applications de la somme deux angles

### III.4.1 Angles associés

**DÉFINITIONS III.4.1**

**(1)** Deux angles complémentaires sont deux angles dont la somme est l'angle droit direct.
**(2)** Deux angles supplémentaires sont deux angles dont la somme est l'angle plat.
**(3)** Deux angles diffèrent d'un plat sont deux angles dont la différence est l'angle plat.

Les remarques suivantes sont illustrées par la figure III.13.

***Remarques*** *Soit* M *et* M′ *deux points de U.*

***1.*** *Les angles* $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$ *et* $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM'}\right)$ *sont opposés si, et seulement si, M et M' sont symétrique par rapport à* O$x$.

***2.*** *Les angles* $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$ *et* $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM'}\right)$ *sont complémentaires si, et seulement si, M et M' sont symétrique par rapport à la droite* $\Delta$ *d'équation :* $y = x$.

***3.*** *Les angles* $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$ *et* $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM'}\right)$ *sont supplémentaires si, et seulement si, M et M' sont symétrique par rapport à* O$y$.

***4.*** *Les angles* $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$ *et* $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM'}\right)$ *diffèrent d'un plat si, et seulement si, M et M' sont symétrique par rapport à* O.

***5.*** *Soit ABC et* A′B′C′ *deux triangles. Si les angles* $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ *et* $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$ *diffèrent d'un plat alors les triangles ABC et* A′B′C′ *sont orientés en sens inverses.*

**THÉORÈME III.4.1**
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et $k$ $k'$ deux réels non nuls.
**(1)** Si : $kk' > 0$ ; alors les angles $\left(k\vec{u}\,;k'\vec{v}\right)$ et $(\vec{u}\,;\vec{v})$ sont égaux.
**(2)** Si : $kk' < 0$ ; alors les angles $\left(k\vec{u}\,;k'\vec{v}\right)$ et $(\vec{u}\,;\vec{v})$ diffèrent d'un plat.

**Démonstration** **(1)** Si $k$ et $k'$ sont strictement positifs, alors le résultat provient de la définition III.3.4. Si non, $k$ et $k'$ sont strictement négatifs et le résultat provient de la relation de Chasles, de la définition III.3.4 et du théorème III.3.5 :

$$\left(k\vec{u}\,;k'\vec{v}\right) \equiv (k\vec{u}\,;-k\vec{u}) + \left(-k\vec{u}\,;-k'\vec{v}\right) + \left(-k'\vec{v}\,;k'\vec{v}\right) \equiv \left(-k\vec{u}\,;-k'\vec{v}\right) \equiv (\vec{u}\,;\vec{v})\,(\mathrm{mod}\,2\pi)\,.$$

**(2)** Si $k > 0$ et $k' < 0$ :

$$\left(k\vec{u}\,;k'\vec{v}\right) \equiv \underbrace{\left(k\vec{u}\,;-k'\vec{v}\right)}_{\equiv(\vec{u}\,;\vec{v})} + \underbrace{\left(-k'\vec{v}\,;k'\vec{v}\right)}_{\equiv\pi} \equiv (\vec{u}\,;\vec{v}) + \pi\,(\mathrm{mod}\,2\pi)\,.$$

Sinon, $k < 0$ et $k' > 0$ et d'après **(1)** et ce qui vient d'être établi : $\left(k\vec{u}\,;k'\vec{v}\right) \equiv \left(-k\vec{u}\,;-k'\vec{v}\right) \equiv (\vec{u}\,;\vec{v}) + \pi\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$ . □

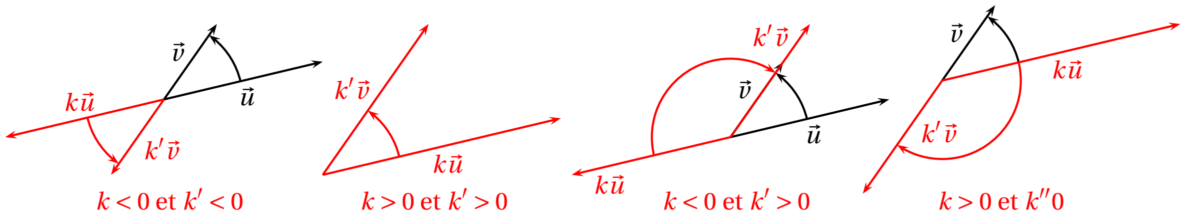



FIG. III.12 – Relation entre $\left(k\vec{u}\,;k'\vec{v}\right)$ et $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

***Notations et vocabulaire*** *L'angle $(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{u},\vec{v})$ est noté : $2(\vec{u},\vec{v})$.*
*Plus généralement, on définit de la même façon le produit d'un angle par un entier relatif non nul.*

**THÉORÈME III.4.2**
Deux angles ont le même double si, et seulement si, ils sont égaux ou diffèrent d'un plat.

**Démonstration** Soit $(\vec{u},\vec{v})$ et $\left(\vec{w},\vec{t}\right)$ deux angles de mesures respectives $x$ et $x'$. On a :

$$\begin{aligned} 2(\vec{u},\vec{v}) = 2\left(\vec{w},\vec{t}\right) &\iff 2x = 2x' + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ &\iff x = x' + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ &\iff x - x' = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Dans le dernier membre de l'équivalence :
- lorsque $k$ est pair, l'égalité signifie que les vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$ et $\left(\vec{w},\vec{t}\right)$ sont égaux ;
- lorsque $k$ est impair, l'égalité signifie que les vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$ et $\left(\vec{w},\vec{t}\right)$ diffèrent d'un plat.

□

On déduit de ce théorème et de la dernière remarque ci-dessus le corollaire suivant.

**COROLLAIRE III.4.3**
Soit ABC et A′B′C′ deux triangles tels que : $2\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = 2\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)$.
**(1)** Si les triangles ABC et A′B′C′ sont orientés dans le même sens alors : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)$ sont égaux.
**(2)** Si les triangles ABC et A′B′C′ sont orientés en sens contraires alors : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)$ diffèrent d'un plat.

On déduit des théorèmes III.4.2 et III.3.4 le corollaire suivant.

**COROLLAIRE III.4.4**
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si : $2(\vec{u},\vec{v}) = 0$

## III.4.2 Formules de symétries

Les formules suivantes se déduisent de façon immédiate de la figure III.13. Pour tout réel $x$, on a :

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \quad \text{(III.1)}$$

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x \quad \text{(III.2)}$$

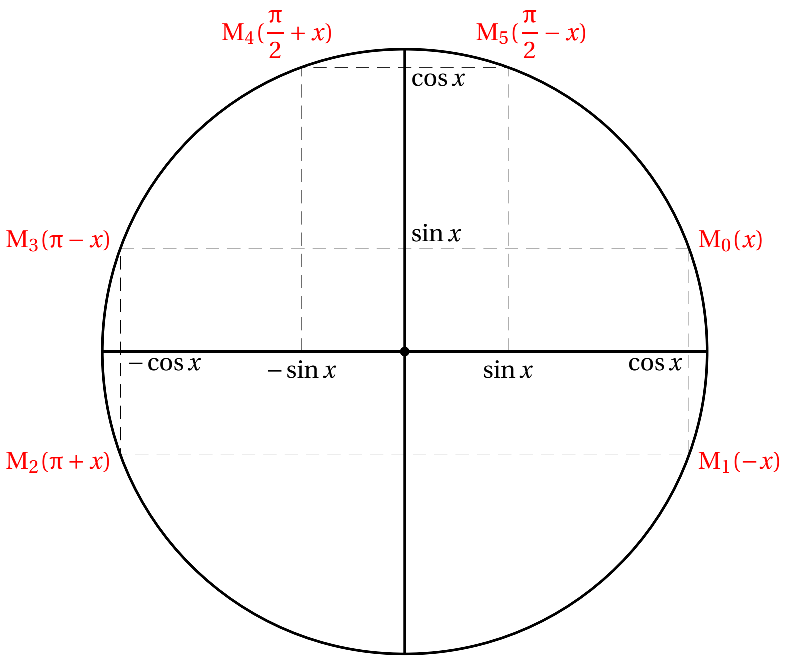



FIG. III.13 – Illustration des formules de symétries

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x \tag{III.3}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x \tag{III.4}$$

Si de plus $x$ n'est pas multiple $\frac{\pi}{2}$, on a :

$$\tan(-x)=-\tan x \qquad \tan(\pi-x)=-\tan x \qquad \tan(\pi+x)=\tan x \tag{III.5}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x} \tag{III.6}$$

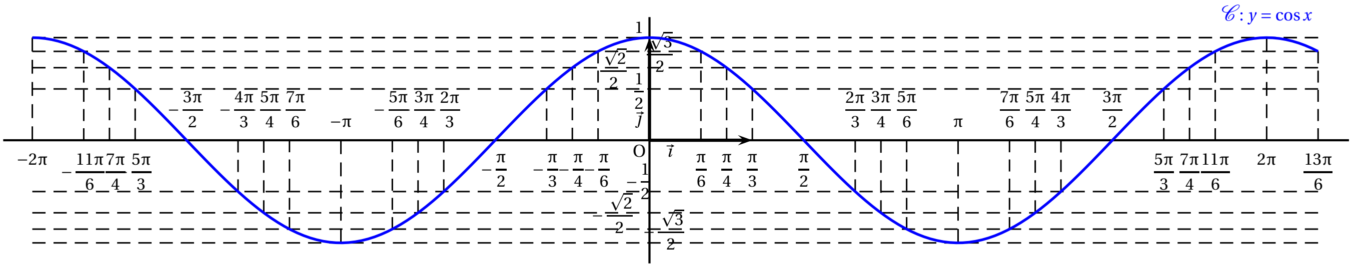
### III.4.3 Étude des fonctions sinus et cosinus

D'après la définition III.3.2 les fonctions sinus et cosinus définies sur $\mathbb{R}$. De plus, d'après le théorème III.3.2, les fonctions sinus et cosinus sont $2\pi$-périodiques. Nous pouvons donc réduire leur étude à un intervalle d'amplitude $2\pi$ : $[-\pi,\pi]$ ; puis nous compléterons les courbes obtenues par des translations successives de vecteurs $2\pi\vec{\imath}$ et $-2\pi\vec{\imath}$.
Pour tout réel $x$ : $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$ ; nous en déduisons que la fonction cosinus est paire et que la fonction sinus est impaire. Nous pouvons donc réduire l'intervalle d'étude à $[0,\pi]$ puis compléter les courbes obtenues par la symétrie d'axe O$y$ dans le cas de la fonction cos et par la symétrie de centre O dans le cas de la fonction sin.
Pour tout réel $x$ : $\cos(\pi-x)=-\cos x$ et $\sin(\pi-x)=\sin x$ ; nous en déduisons, d'après la remarque consécutive au théorème I.4.3, que la courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport au point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ et, d'après la remarque consécutive au théorème I.4.1, que la courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'axe d'équation : $x=\frac{\pi}{2}$. Nous pouvons donc réduire l'intervalle d'étude à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
Sur la figure III.7, nous constatons que lorsque $x$ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, son image M($x$) varie de A à B sur U et dans le premier cadran et $\cos x$ diminue alors que $\sin x$ augmente. Nous en déduisons les tableaux de variations ci-dessous.

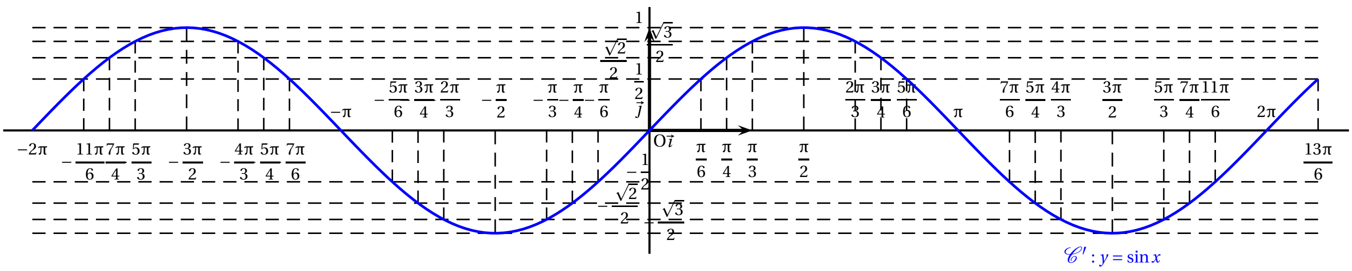
| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |

TAB. III.1 – Tableaux de variations des fonctions cos et sin sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.




Pour tout nombre réel $x$, nous avons : $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ; nous en déduisons que la représentation graphique de la fonction sinus et l'image de celle de la fonction cosinus par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{\imath}$.




### III.4.4 Coordonnées polaires

Un point M, distinct de l'origine peut-être repéré par ses coordonnées rectangulaires $(a, b)$ ou par ces coordonnées polaires $[r, \theta]$.
Dire que M a pour coordonnées rectangulaires $(a, b)$ signifie que $\overrightarrow{OM} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$.
Dire que M a pour coordonnées polaires $[r, \theta]$, par rapport au repère $(O; \vec{\imath})$, signifie que $OM = r$ et $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right) \equiv \theta \pmod{2\pi}$. Le schéma de la figure III.15 résume les règles de passage d'un système de coordonnées à l'autre.

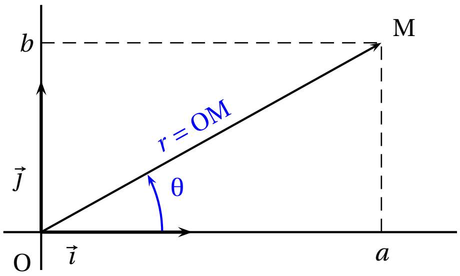



FIG. III.14 – Coordonnées polaires

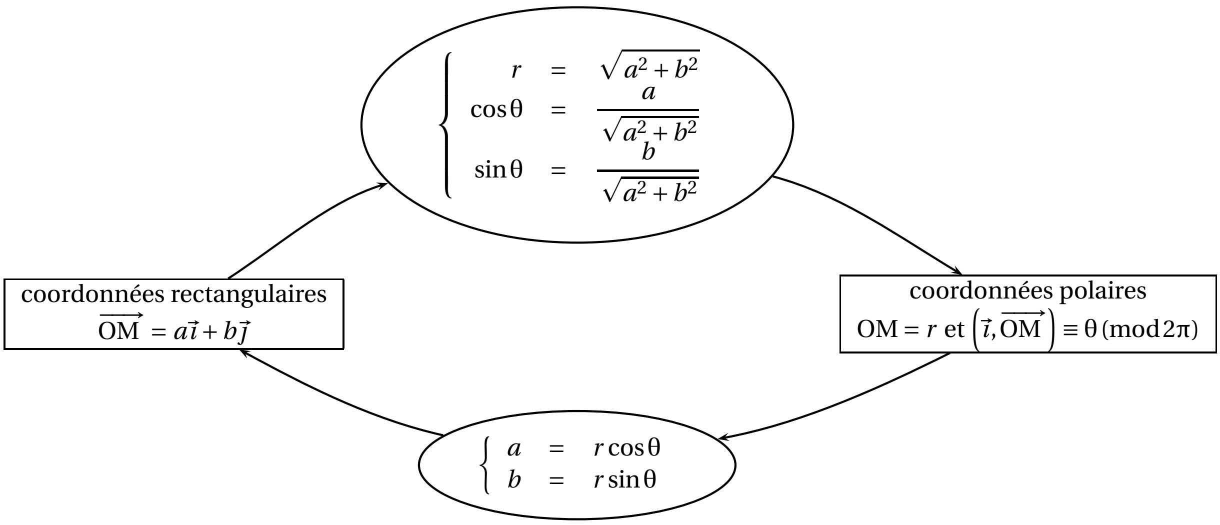



FIG. III.15 – Formules de conversions coordonnées polaires $\longleftrightarrow$ coordonnées rectangulaires

***Notations et vocabulaire*** *Le nombre réel positif r est appelé rayon ou parfois rayon-vecteur. L'angle* $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$ *ou l'une de ses mesures,* $\theta$*, est appelé angle polaire. Le point O est appelé pôle et l'axe* $(O;\vec{\imath})$ *est appelé axe polaire.*
*De même que pour les repères cartésiens, les coordonnées polaires d'un vecteur* $\overrightarrow{OM}$ *sont les coordonnées polaires du point M.*

### III.4.5 Formules d'addition

**Théorème III.4.5**
Pour tous nombres réels $a$ et $b$ :
**(1)** $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$.
**(2)** $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ et $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

**Démonstration** **(1)** Soit $a$ et $b$ deux nombres réels, M, N, P les images respectives de $a$, $a+b$, $a+\frac{\pi}{2}$ sur U. Dans le repère $(O;\vec{\imath})$, les points M, N, P ont respectivement pour coordonées polaires : $[1;a]$ ; $[1;a+b]$ ; $\left[1;a+\frac{\pi}{2}\right]$. Nous en déduisons que : $\overrightarrow{OM} = \cos a\vec{\imath} + \sin a\vec{\jmath}$ ; $\overrightarrow{ON} = \cos(a+b)\vec{\imath} + \sin(a+b)\vec{\jmath}$ ; $\overrightarrow{OP} = \cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\vec{\imath} + \left(a+\frac{\pi}{2}\right)\vec{\jmath} = -\sin a\vec{\imath} + \cos a\vec{\jmath}$.
Le couple $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}\right)$ est une base orthonormée direct. Relativement au repère $\left(O;\overrightarrow{OM}\right)$ le point P a pour coordonnées polaires : $[1;b]$ ; donc :

$$\begin{aligned}\cos(a+b)\vec{\imath} + \sin(a+b)\vec{\jmath} &= \overrightarrow{ON}\\ &= \cos b\overrightarrow{OM} + \sin b\overrightarrow{OP}\\ &= \cos b\left(\cos a\vec{\imath} + \sin a\vec{\jmath}\right) + \sin b\left(-\sin a\vec{\imath} + \cos a\vec{\jmath}\right)\\ &= (\cos a\cos b - \sin a \sin b)\,\vec{\imath} + (\cos a \sin b + \sin a\cos b)\,\vec{\jmath}.\end{aligned}$$

Les cordonnées du vecteurs $\overrightarrow{ON}$ sont uniques, nous en déduisons les égalités désirées.
**(2)** Utilisons la parité des fonctions sin et cos ; il vient pour tous réels $a$ et $b$ :

$$\cos(a-b) = \cos a\cos(-b) - \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \cos a \sin(-b) + \sin a \cos(-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b. \square$$

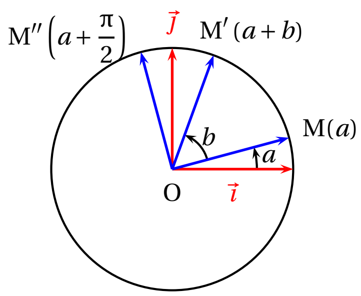



Fig. III.16 – Formules d'addition.

***Exercice III.4.1.*** ***Calculer le cosinus de*** $\frac{5\pi}{12}$.

***Solution*** *Nous avons :* $\frac{5\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ *; donc :*

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$\square$

### III.4.6 Formules de duplication et linéarisation

En prenant pour $b$ le nombre $a$ dans la propriété **(1)** du théorème III.4.5, nous obtenons le théorème suivant.

**Théorème III.4.6** **Formules de duplication**
Pour tout réel $a$, on a :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \qquad \sin 2a = 2\sin a \cos a$$

On déduit de la première formule le théorème suivant.

**Théorème III.4.7** **Formules de linéarisation**
Pour tout réel $a$, on a :

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}.$$

## III.5 Compléments

Les considérations évoquées dans cette partie, ne sont pas explicitement aux programme, mais pourront toutefois être utile aux élèves désireux d'en savoir plus.

### III.5.1 Formules de trigonométrie avec tan

### III.5.2 Quelques théorèmes sur les angles orientés

Le théorème sur la somme des angles d'un triangle s'étend par le théorème suivant.

**THÉORÈME III.5.1**
Soit A, B, C trois points deux à deux distincts.

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\equiv\pi\pmod{2\pi}.$$

**Démonstration** Ce théorème est une conséquence immédiate de la relation de Chasles et du théorème III.4.4 :

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\pi\pmod{2\pi}.$$

□

Le théorème suivant est la version « angles orientés » du théoème de l'angle inscrit.

**THÉORÈME III.5.2 THÉORÈME DE L'ANGLE INSCRIT**
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O, et A, B, M trois points de $\mathscr{C}$ tels que M est distinct de A et B.

$$2\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\pmod{2\pi}.$$

**Démonstration** Les triangles MOA et MOB sont isocèles en O donc, d'après le théorème III.5.1 :

$$\begin{cases}\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right)\equiv\pi-2\left(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MA}\right)\equiv2\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO}\right)+\pi\pmod{2\pi}\\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\pi-2\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MO}\right)\equiv2\left(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MB}\right)-\pi\pmod{2\pi}\end{cases}.$$

Par somme et en utilisant la relation de Chasles, nous en déduisons le résultat recherché. □

***Remarque*** *Ce théorème est plus général que le théorème usuel. En effet, soit N un autre point de $\mathscr{C}$. Nous avons alors :* $2\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv2\left(\overrightarrow{NA};\overrightarrow{NB}\right)\pmod{2\pi}$.
*D'après le corollaire III.4.3, deux cas sont à envisager :*
- *si les points M et N interceptent le même arc, alors les ABM et ABN sont orientés dans le même sens et les angles* $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)$ *et* $\left(\overrightarrow{NA};\overrightarrow{NB}\right)$ *sont égaux ;*
- *si les points M et N interceptent deux arcs différents, alors les ABM et ABN sont orientés en sens contraires et les angles* $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)$ *et* $\left(\overrightarrow{NA};\overrightarrow{NB}\right)$ *diffèrent d'un plat ;*

La réciproque du théorème III.5.2 est vraie.

**THÉORÈME III.5.3 THÉORÈME DE COCYCLICITÉ**
Soit A, B, C, D quatre points tels que : $A\neq B$ ; $C\notin(AB)$ et $D\notin(AB)$.
Les points A, B, C, D sont cocycliques[2] si, et seulement si : $2\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\equiv2\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}\right)\pmod{2\pi}$.

**Démonstration**

**théorème direct** A, B et C ne sont pas alignés, introduisons le centre, O, du cercle $\mathscr{C}$, circonscrit au triangle ABC. C et D sont donc deux points de $\mathscr{C}$, et d'après le théorème III.5.2 : $2\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv2\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}\right)\pmod{2\pi}$.

**théorème réciproque** Introduisons le centre, O′, du cercle circonscrit au triangle ABD. Il suffit de démontrer que les points O et O′ sont confondus.
Nous avons : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv2\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\equiv2\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{O'A};\overrightarrow{O'B}\right)$.
Les triangles OAB et O′AB sont donc orientés dans le même sens, ils sont de plus isocèle en O et O′, donc d'après le théorème III.5.1 : $2\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}\right)\equiv\pi-\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\pi-\left(\overrightarrow{O'A};\overrightarrow{O'B}\right)\equiv2\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO'}\right)\pmod{2\pi}$ ;
puis d'après le corollaire III.4.3 : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO'}\right)\pmod{2\pi}$ ; d'où : $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AO'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO'}\right)-\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}\right)\equiv0\pmod{2\pi}$ ;
De même : $\left(\overrightarrow{BO};\overrightarrow{BO'}\right)\equiv0\pmod{2\pi}$ ; donc O′ est le point d'intersection de demi-droites [AO) et [BO) et les points O et O′ sont confondus.

□

### III.5.3 Sommes différences et produits de fonction circulaires

On déduit par addition ou soustraction dans les propriétés **(1)** et**(2)** du théorème III.4.5 que pour tous réels $a$ et $b$ :

$$\cos a\cos b=\cos(a+b)+\cos(a-b)\tag{III.7}$$
$$\sin a\sin b=\cos(a+b)-\cos(a-b)\tag{III.8}$$
$$\sin a\cos b=\sin(a+b)+\sin(a-b)\tag{III.9}$$

[2]Des points cocycliques sont des points qui sont éléments d'un même cercle.

En posant $p = a + b$ et $q = a - b$ dans (III.7) à (III.9) , on démontre que pour tous réels $p$ et $q$, on a :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{III.10}$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{III.11}$$

### III.5.4 Équations trigonométriques

#### III.5.4.a $\cos x = \cos\alpha$

**Théorème III.5.4**

Soit $\alpha$ un nombre réel.

$$\cos x = \cos\alpha \iff \left| \begin{array}{c} x = \alpha + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array} \right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

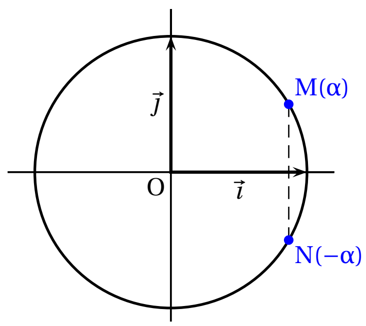



Fig. III.17 – Équation $\cos x = \cos\alpha$

***Remarque*** *On peut aussi écrire :*

$$\cos x = \cos\alpha \iff \left| \begin{array}{c} x \equiv \alpha \pmod{2\pi} \\ \textit{ou} \\ x \equiv -\alpha \pmod{2\pi} \end{array} \right.$$

***Exercice III.5.1.*** ***Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique (unité graphique : 3 cm).***

***a.*** $\mathbf{2\cos x = -1}$.

***b.*** $\mathbf{\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$.

***Solution a.*** *Résolvons l'équation :*

$$2\cos x = -1 \tag{E$_1$}$$

*On a :*

$$\begin{aligned} (E_1) &\iff \cos x = -\frac{1}{2} \\ &\iff \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \\ &\iff \left| \begin{array}{c} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \textit{ou} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k'2\pi \ (k' \in \mathbb{Z}) \end{array} \right. \end{aligned}$$

*Les images des solutions sur le cercle trigonométrique sont représentées sur la figure III.18.*

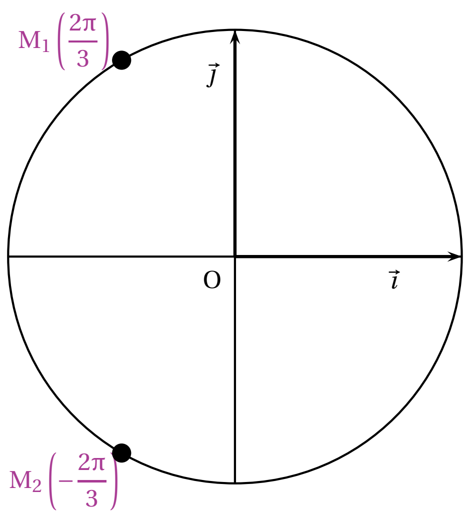



Fig. III.18 – Images des solutions de $(E_1)$

***b.*** *Résolvons l'équation :*

$$\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (E_2)$$

*On a :*

$$(E_2) \iff \left|\begin{array}{l} 2x = x - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \quad\quad ou \\ 2x = -x + \dfrac{\pi}{4} + k'2\pi\ (k' \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

$$\iff \left|\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \quad\quad ou \\ 3x = \dfrac{\pi}{4} + k'2\pi\ (k' \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

$$\iff \left|\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \quad\quad ou \\ x = \dfrac{\pi}{12} + k'\dfrac{2\pi}{3}\ (k' \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

*Les images des solutions sur le cercle trigonométrique sont représentées sur la figure III.19.*□

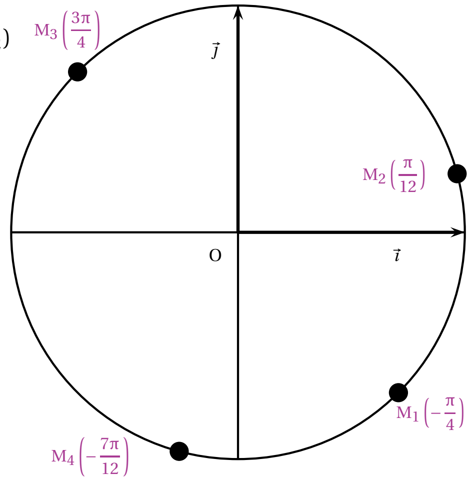



FIG. III.19 – Images des solutions de $(E_2)$

### III.5.4.b $\sin x = \sin\alpha$

**THÉORÈME III.5.5**
Soit α un nombre réel.

$$\sin x = \sin\alpha \iff \left|\begin{array}{c} x = \alpha + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

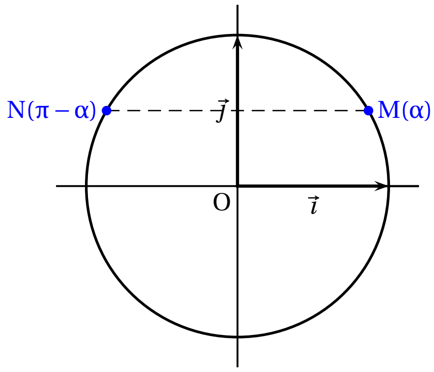



FIG. III.20 – Équation $\sin x = \sin\alpha$

***Remarque*** *On peut aussi écrire :*

$$\sin x = \sin a \iff \left|\begin{array}{c} x \equiv \alpha\,(\mathrm{mod}\,2\pi) \\ ou \\ x \equiv \pi - \alpha\,(\mathrm{mod}\,2\pi) \end{array}\right.$$

***Exercice III.5.2.*** ***Résoudre dans $\mathbb{R}$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique (unité graphique : 3 cm) : $2\sin^2 x = 1$.***

***Solution*** *Résolvons l'équation :*

$$2\sin^2 x = 1 \qquad (E_3)$$

*On a :* $(E_3) \iff \sin^2 x - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$

$$\iff \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\iff \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ou\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\iff \sin x = \sin\frac{\pi}{4}\ ou\ \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\iff \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \quad\quad ou \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \quad\quad ou \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \quad\quad ou \\ x = \pi + \dfrac{\pi}{4} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

$$(E_3) \iff \left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \quad\quad ou \\ x = 3\frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \quad\quad ou \\ x = 7\frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \quad\quad ou \\ x = 5\frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$$

$$(E_3) \iff \left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + (4k) \times \frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \quad\quad ou \\ x = \frac{\pi}{4} + (4k+1) \times \frac{\pi}{2} ; (k \in \mathbb{Z}) \\ \quad\quad ou \\ x = \frac{\pi}{4} + (4k+3) \times \frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \quad\quad ou \\ x = \frac{\pi}{4} + (4k+2) \times \frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$$

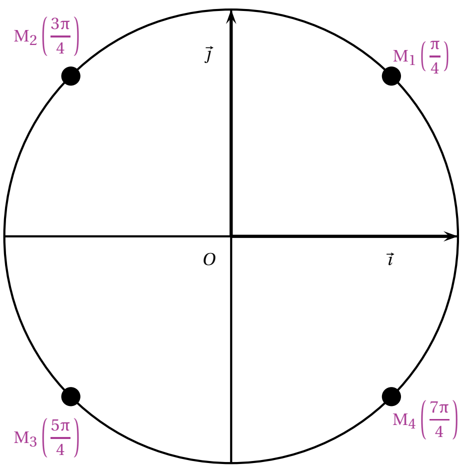



FIG. *III.21 – Images des solutions de* $(E_3)$

*Or* $(4k)$, $(4k+1)$, $(4k+2)$, $(4k+3)$ *sont des entiers et réciproquement tout entier* $n$ *est de la forme :* $4k+r$ *avec* $r \in \{0;1;2;3\}$ *; en effet,* $k$ *et* $r$ *sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de* $n$ *par* $4$ *; donc :*

$$\boxed{\mathbf{(E_3) \iff x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} \ (n \in \mathbb{Z})}}$$

*Les images des solutions sur le cercle trigonométrique sont représentées sur la figure III.21.* □

## III.5.4.c $\tan x = \tan \alpha$

**THÉORÈME III.5.6**

Soit $\alpha$ un nombre réel tel que $\tan \alpha$ soit défini.

$$\tan x = \tan \alpha \iff x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

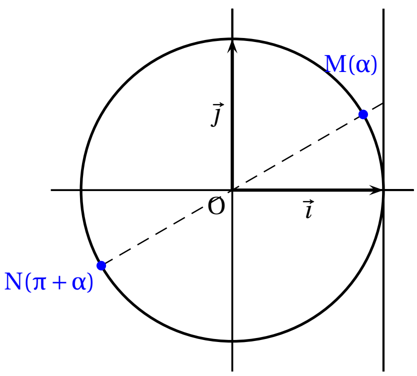



FIG. III.22 – Équation $\tan x = \tan \alpha$

***Remarque*** *On peut aussi écrire :*

$$\tan x = \tan \alpha \iff x \equiv \alpha \ (\mathrm{mod}\ \pi)$$

### III.5.4.d $a\cos x + b\sin x = c$

On rappelle que les formules de passages entre coordonnées rectangulaires et coordonnées polaires sont par : $\begin{cases} r &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta &= \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

et $\begin{cases} a &= r\cos\theta \\ b &= r\sin\theta \end{cases}$.

Pour plus de précisions, on pourra se référer au paragraphe III.4.4 page 51. On se propose de résoudre l'équation :

$$a\cos x + b\sin x = c \qquad \text{(III.12)}$$

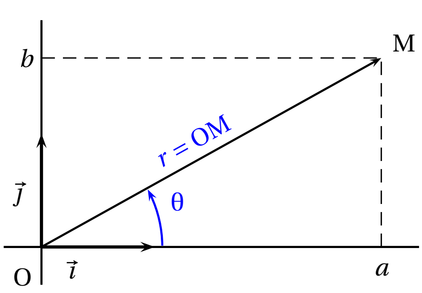



FIG. III.23 – Coordonnées polaires

Où $a$, $b$, $c$ sont des réels tels que $a$ et $b$ ne soient pas tous nuls.

Posons : $\begin{cases} r &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta &= \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$ ; on a alors : $\begin{cases} a &= r\cos\theta \\ b &= r\sin\theta \end{cases}$ ; d'où il vient :

$$\text{(III.23)} \iff r\cos\theta\cos x + r\sin\theta\sin x = c \iff \cos(x-\theta) = \frac{c}{r}.$$

On est ainsi ramené au type d'équation étudié au paragraphe III.5.4.a (page 54).

***Exercice III.5.3.*** ***Résoudre dans $\mathbb{R}$ et représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de l'équation :***

$$\mathbf{3\cos x + \sqrt{3}\sin x = -3} \qquad \text{(III.13)}$$

***Solution*** *On a :* $\sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ *; on en déduit que :*

$$\begin{aligned}
\text{(III.13)} &\iff 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) = -3 \\
&\iff \cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} \\
&\iff \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} \\
&\iff \left| \begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ \quad ou \\ x - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array} \right. \quad (k\in\mathbb{Z}) \\
&\iff \left| \begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ \quad ou \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array} \right. \quad (k\in\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

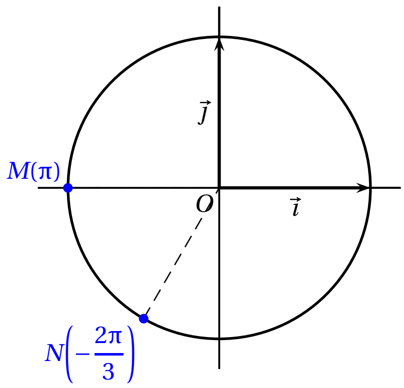



FIG. *III.24 – Images des solutions de l'équation* (III.13)

□

### III.5.5 Exercices

#### Angles associés

**III.5.a.** ABCDE est un pentagone régulier direct de centre O. Déterminer la mesure principale de : $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OD}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BC}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{BC}\right)$.

# Chapitre IV

# Calcul de dérivées et applications

Dans tous ce chapitre le plan est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

## IV.1 Notions préliminaires

### IV.1.1 Accroissement moyen

Soit $f$ une fonction, $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique et A, B deux points distincts de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives $a$ et $b$. L'accroissement moyen (ou taux de variation) de $f$ entre $a$ et $b$ est le coefficient directeur de la droite (AB).
Les points A et B ont respectivement pour coordonnées $(a;f(a))$ et $(b;f(b))$, on en déduit que l'accroissement moyen de $f$ entre $a$ et $b$, noté $\theta_{a,b}$ est défini par :

$$\theta_{a,b}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

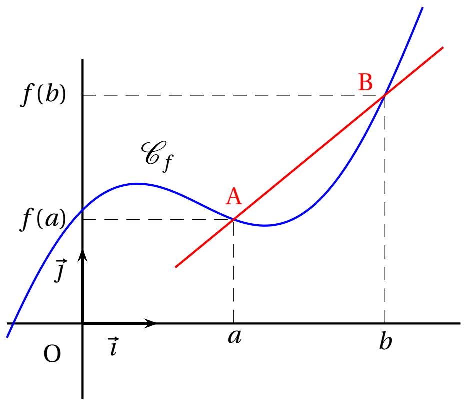



FIG. IV.1 – Le coefficient directeur de (AB) est l'accroissement moyen de $f$ entre $a$ et $b$.

**DÉFINITION IV.1.1** **ACCROISSEMENT MOYEN**

> Soit $f$ une fonction et $a$, $b$ deux éléments distincts de son ensemble de définition.
> L'accroissement moyen[1] de $f$ entre $a$ et $b$ est le quotient :
>
> $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Lorsque l'abscisse passe de $a$ à $b$, le numérateur est la variation des images par $f$ et le dénominateur la variation des abscisses. La définition peut donc être résumée par :

$$\theta_{a,b}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{IV.1}$$

***Exemple*** *L'accroissement moyen de la fonction, $f : x \mapsto x^2$, entre 2 et 5 est :*
$\dfrac{f(5)-f(2)}{5-2}=\dfrac{25-4}{5-2}=7.$
*L'accroissement moyen de la fonction $f$, entre 5 et 2 est :* $\dfrac{f(2)-f(5)}{2-5}=\dfrac{4-25}{2-5}=7$

***Remarques***

1. *Plus généralement l'accroissement moyen d'une fonction entre $a$ et $b$ est le même que celui entre $b$ et $a$.*
2. *Lorsque $f$ est croissante sur $[a;b]$, l'accroissement moyen de $f$ entre $a$ et $b$ est positif.*
3. *Lorsque $f$ est décroissante sur $[a;b]$, l'accroissement moyen de $f$ entre $a$ et $b$ est négatif.*
4. *La réciproque est fausse. Trouver un contre-exemple.*

Traiter les exercices : IV.1.a. ; IV.1.b. ; IV.1.c. ; IV.1.d. et IV.1.e. page 62.
Bien souvent, au lieu de considérer l'abscisse initiale, $a$, et l'abscisse finale, $b$, on considère l'abscisse initiale et la

[1] L'accroissement moyen est aussi appelé taux de variations.

variation $h$. On a donc : $\Delta x = h$ et $b = a + h$. La formule IV.1 devient alors :

$$\theta_{a,a+h} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{IV.2}$$

Traiter l'exercice : IV.1.f..

### IV.1.2 Limite finie en $a$

On considère la fonction, $f : x \mapsto 3x^2 - 5x + 1$. Calculer $f(2)$.
Reproduire et compléter le tableau IV.1 :

| $x$ | $2+1$ | $2-10^{-1}$ | $2+10^{-2}$ | $2-10^{-3}$ | $2+10^{-4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |

TAB. IV.1 – Valeurs de $f(x)$ quand $x$ tend vers 2.

Qu'est-ce que ces résultats nous amènent à conjecturer ?

Plus généralement, à de très rares exceptions près, toutes les fonctions, $f$, étudiées en 1re S vérifient la propriété suivante : si $f$ est définie en un réel $a$, alors pour rendre $f(x)$ aussi proche qu'on veut de $f(a)$, il suffit de prendre $x$ suffisamment proche de $a$.
On dira alors que la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $a$ est $f(a)$. On écrira :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

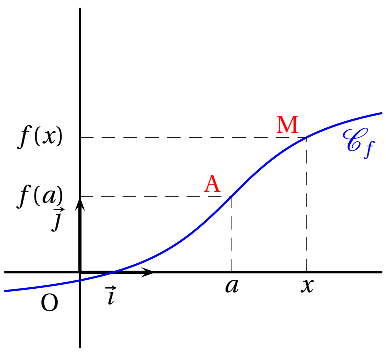



FIG. IV.2 – Courbe d'une fonction vérifiant la propriété.

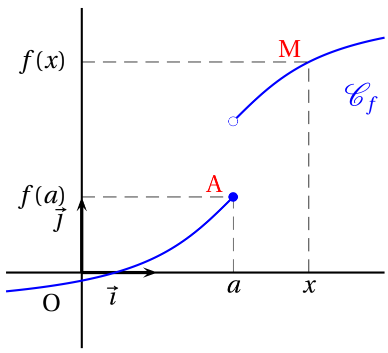



FIG. IV.3 – Courbe d'une fonction ne vérifiant pas la propriété.

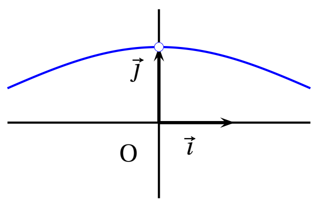



FIG. IV.4 – Courbe de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.

Sur la figure IV.2, lorsque $x$ tend vers $a$, le point M tend vers le point A : la propriété est vérifiée en $a$.
Sur la figure IV.3, lorsque $x$ tend vers $a$ par valeurs supérieures, le point M ne tend pas vers le point A : la propriété n'est pas vérifiée en $a$.
Cependant certaines fonctions admettent une limite en $a$ sans être définies en $a$. Pour s'en convaincre, examinons le comportement de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ au voisinage de 0.
La fonction $g$ est-elle définie en 0 ?

En utilisant une calculatrice configurée en mode radian, recopier et compléter le tableau IV.2 :

| $x$ | $1$ | $-0,1$ | $0,001$ | $-0,0001$ | $0,00001$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | | | | |

TAB. IV.2 – Limite en 0 de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.

Qu'est-ce que ces résultats nous amènent à conjecturer ?
Traiter les exercices : IV.1.g. et IV.1.h..

### IV.1.3 Vocabulaire des approximations

Beaucoup ont essayé de connaître les premières décimales du développement du nombre π :

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !
Immortel Archimède, artiste, ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.
Jadis, mystérieux, un problème bloquait
Tout l'admirable procédé, l'œuvre grandiose
Que Pythagore découvrit aux anciens Grecs.
Ô quadrature ! Vieux tourment du philosophe
Insoluble rondeur, trop longtemps vous avez
Défié Pythagore et ses imitateurs.
Comment intégrer l'espace plan circulaire ?
Former un triangle auquel il équivaudra ?
Nouvelle invention : Archimède inscrira
Dedans un hexagone ; appréciera son aire
Fonction du rayon. Pas trop ne s'y tiendra :
Dédoublera chaque élément antérieur ;
Toujours de l'orbe calculée approchera ;
Définira limite ; enfin, l'arc, le limiteur
De cet inquiétant cercle, ennemi trop rebelle
Professeur, enseignez son problème avec zèle.

Mais nul ne connaîtra jamais l'intégralité du développement décimal du nombre π.
Dans un calcul numérique, on remplace le nombre π par une valeur approchée, par exemple : 3,14. L'erreur commise dans cette approximation est alors le nombre, $e$, défini par : $e = 3,14 - \pi$. On ne connaît pas le développement décimal de $e$ (car sinon on pourrait en déduire celui de π), mais l'important est de connaître un majorant de la distance entre π et 3,14. Le majorant trouvé sera appelé *incertitude*. On sait que : $\pi = 3,1415\cdots$ ; donc : $|3,14 - \pi| \leqslant 10^{-2}$. Nous écrirons donc : $\pi \simeq 3,14$ à $10^{-2}$ près. Une approximation n'a pas de sens si aucune incertitude ne lui est jointe. Ainsi l'énoncé, « $\pi \simeq 10^6$ », n'est pas une proposition (il n'est ni vrai ni faux), il n'a aucun sens. En revanche l'énoncé, « $\pi \simeq 10^6$ à $10^6$ près », est une proposition vraie. La valeur approchée et l'incertitude sont donc les paramètres fondamentaux de toute approximation.

Soit $x$ un nombre réel que l'on approche pour un nombre $a$. Les considérations évoquées ci-dessus se généralisent de la façon suivante.

**erreur** L'*erreur* est le nombre $e$ défini par : $e = a - x$. Ce nombre n'est pas nécessairement positif.

**excès** $a$ est une valeur approchée par *excès* de $x$ lorsque l'erreur est positive.

**défaut** $a$ est une valeur approchée par *défaut* de $x$ lorsque l'erreur est négative.

**incertitude** L'*incertitude* d'une approximation, souvent notée ε, est un majorant de la valeur absolue de l'erreur : $|a - x| \leqslant \varepsilon$.

**arrondi décimal d'ordre *n*** L'*arrondi* décimal d'ordre $n$ de $x$ est une approximation dans laquelle : $\varepsilon = \frac{1}{2}10^{-n}$ et $10^n a \in \mathbb{Z}$.

***Remarques***

***1.*** *Dire que $a$ est valeur approchée de $x$ à ε près signifie que :* $a \in [x - \varepsilon ; x + \varepsilon]$.

***2.*** *Certains réels ont plusieurs arrondis décimaux d'ordre n, par exemple* 2,345 *a deux arrondis décimaux d'ordre 2 :* 2,34 *et* 2,35. *En effet, l'incertitude vaut* $\frac{1}{2}10^{-2}$ *soit* $5 \times 10^{-3}$ *et $x$ vaut* 2,345 *donc :*

$$|a - x| \leqslant \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad a \in [x - \varepsilon ; x + \varepsilon] \quad \Longleftrightarrow \quad a \in [2,34 ; 2,35]$$

*Ce dernier intervalle a deux éléments décimaux avec deux chiffres après la virgule :* 2,34 *et* 2,35.
*En pratique cette ambiguïté n'est pas gênante car les nombres que l'on cherche à approcher sont rarement décimaux.*

***Exercice IV.1.1.*** ***On prend comme valeur approchée de π le nombre $\frac{355}{113}$.***
***Ce nombre est-il une valeur approchée par défaut ou par excès ? préciser une incertitude.***

***Solution*** *L'erreur commise est :* $\frac{355}{113} - \pi = 2,66\cdots \times 10^{-7}$ *; donc :* $\frac{355}{113}$ *est une valeur approchée par excès de π à* $10^{-6}$ *près par excès.* □

### IV.1.4 Exercices

**IV.1.a.** On considère la fonction :

$$f : x \mapsto -3x+1.$$

Calculer l'accroissement moyen de $f$ entre 1 et 6, puis entre $-1$ et 2.
Le résultat est-il surprenant ? Généraliser.

**IV.1.b.** On considère la fonction :

$$f : x \mapsto x^2-3x+1.$$

Calculer l'accroissement moyen de $f$ entre 1 et 6, puis entre $-1$ et 2.

**IV.1.c.** Donner une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont le taux de variation entre $-1$ et 2 est positif, mais qui n'est pas croissante sur $[-1;2]$.

**IV.1.d.** L'unité de distance est le kilomètre et l'unité de temps est l'heure. Pierre décide de partir en randonnée pédestre. À 8h (c'est-à-dire à $t=8$) Pierre débute la randonnée au kilomètre 0. À 10h, il est au kilomètre 20. À 13h, il est au kilomètre 35. On désigne par $d$ la fonction qui associe à chaque instant $t$ la distance parcourue entre les instants 8 et $t$.
Calculer l'accroissement moyen de $d$ entre 10 et 13.
Interpréter le résultat en langage courant.

**IV.1.e.** On considère la fonction :

$$f : x \mapsto x^2-3x+1,$$

$a$ et $b$ sont deux réels distincts. Exprimer l'accroissement moyen de $f$ entre $a$ et $b$ sous forme d'un polynôme en $a$ et $b$.

**IV.1.f.** On considère la fonction :

$$f : x \mapsto x^2-3x+1,$$

Exprimer l'accroissement moyen de $f$ entre 2 et $2+h$ sous forme d'un polynôme en $h$.

**IV.1.g.** On considère les fonctions :

$$f : x \mapsto x^2-3x+1;$$

$$g : h \mapsto \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

Étudier la limite de $g$ en 0.

**IV.1.h.** On considère la fonction :

$$f : x \mapsto 3x^2-2x+7.$$

$g$ est la fonction qui à $h$ associe l'accroissement moyen de $f$ entre 4 et $4+h$. Étudier la limite de $g$ en 0.

**IV.1.i.** On prend comme valeur approchée de $\pi$ le nombre $\frac{97258}{30959}$.
Ce nombre est-il une valeur approchée par défaut ou par excès ? préciser une incertitude.

## IV.2 Introduction

### IV.2.1 Nombre dérivé, tangente

Sur la figure IV.5, A et M sont les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives $a$ et $a+h$.
On constate que lorsque $h$ tend vers 0 alors $a+h$ tend vers $a$ et M tend vers A. La droite (AM) tend alors vers la droite $T_a$, appelée tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a$.
Le coefficient directeur de la $T_a$ est appelé *nombre dérivé* de $f$ en $a$ et est noté : $f'(a)$.

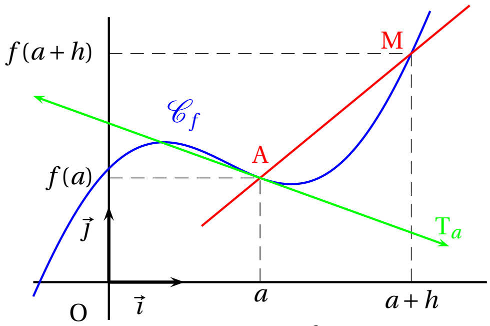



FIG. IV.5 – Tangente à $\mathscr{C}_f$ en $a$.

Nous admettons que lorsque $h$ tend vers 0, le coefficient directeur de (AM) tend vers celui de $T_a$ ; c'est-à-dire :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a).$$

**DÉFINITIONS IV.2.1 FONCTION DÉRIVABLE EN $a$, NOMBRE DÉRIVÉ DE $f$ EN $a$**

Soit $f$ une fonction et $a$ un élément de son ensemble de définition.

**(1)** Si $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite finie lorsque $h$ tend vers 0, on dit que $f$ est dérivable en $a$ et le nombre vers lequel le quotient tend est appelé nombre dérivé en $f$ en $a$.

**(2)** Si $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite infinie, ou n'a pas de limite, lorsque $h$ tend vers 0, on dit que $f$ n'est pas dérivable en $a$.

En pratique, une fonction dérivable en $a$ est une fonction dont la courbe présente au point d'abscisse $a$ une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées, le nombre dérivé est alors le coefficient directeur de la tangente.

***Exemple*** *La courbe de figure IV.6 présente au point d'abscisse* 2 *une tangente de coefficient directeur* 1, *donc la fonction $f$ est dérivable en* 2 *et $f'(2)=1$.*

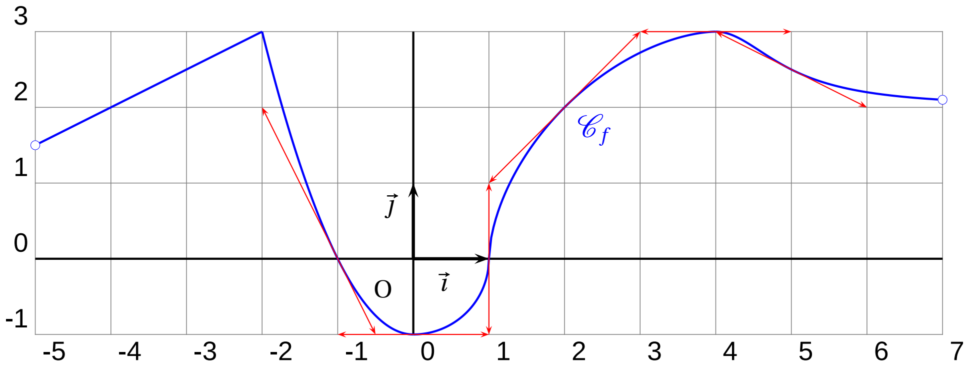



FIG. IV.6 – Courbe représentative d'une fonction $f$.

Traiter les exercices : IV.2.a. ; IV.2.b. ; IV.2.c. et IV.2.d..

Sur la figure IV.5, la tangente au point d'abscisse $a$ passe par $\mathrm{A}\big(a\,;f(a)\big)$ et a pour coefficient directeur $f'(a)$, on en déduit le théorème suivant.

**THÉORÈME IV.2.1 ÉQUATION DE LA TANGENTE**

Soit $f$ une fonction dérivable en un réel $a$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.
La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a$ a pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

***Exemple*** *Soit $f$ une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe. Si : $f(2)=1$ et $f'(2)=-3$ ; alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 a pour équation : $y=-3(x-2)+1$ ; c'est-à-dire : $y=-3x+7$.*

Traiter les exercices IV.2.e. ; IV.2.f. ; IV.2.g. et IV.2.h..

***Remarque*** *Si $f'(a)=0$, alors la tangente au point d'abscisse $a$ est « horizontale ».*

**THÉORÈME IV.2.2 APPROXIMATION AFFINE**

Soit $f$ une fonction dérivable en un réel $a$. Si $x$ est suffisamment proche de $a$, alors :

$$f(x) \simeq f'(a)(x-a) + f(a).$$

***Exemple*** *On admet que le nombre dérivé de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ en 25 est $\dfrac{1}{10}$. Donc pour $x$ assez proche de 25, on a : $f(x) \simeq 0,1(x-25)+f(25)$ ; c'est-à-dire : $\sqrt{x} \simeq 0,1(x-25)+5$.*
*En particulier, pour $x=26$, il vient : $\sqrt{26} \simeq 5,1$.*
*Or : $\sqrt{26} = 5,099\cdots$ ; donc dans cette approximation, la valeur absolue de l'erreur commise est majorée par $10^{-3}$.*

Traiter les exercices IV.2.i. et IV.2.j.

## IV.2.2 Fonction dérivée

Considérons la fonction affine $f : x \mapsto 2x-3$. Déterminer le nombre dérivé de $f$ en 5, en 7 et en $a$ (avec $a \in \mathbb{R}$).
On a donc pour tout réel $x$ : $f'(x)=2$. La fonction $f'$ ainsi définie est appelée fonction dérivée de $f$.

**DÉFINITIONS IV.2.2 FONCTION DÉRIVÉE**

Soit $f$ une fonction.

**(1)** La *dérivée* de $f$ est la fonction $f'$, qui à tout réel $x$ où $f$ est dérivable associe le nombre $f'(x)$.

**(2)** L'*ensemble de dérivabilité* de $f$ est l'ensemble des nombres où elle est dérivable, c'est-à-dire l'ensemble de définition de $f'$.

**(3)** On dira que $f$ est dérivable sur un intervalle I lorsqu'elle est dérivable en tout élément de I.

***Exemples***

*1.* *La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est représentée sur la figure IV.7, l'ensemble de définition de $f$ est $[0\,;+\infty[$ mais $f$ n'est pas dérivable en 0 car $\mathscr{C}$ présente en $O$ une demi-tangente verticale ; en tout autre point $\mathscr{C}$ présente une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées, on en déduit que l'ensemble de dérivabilité de $f$ est $]0\,;\infty[$.*
*Sur la figure IV.7, on a tracé la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4. Donner $f'(4)$.*

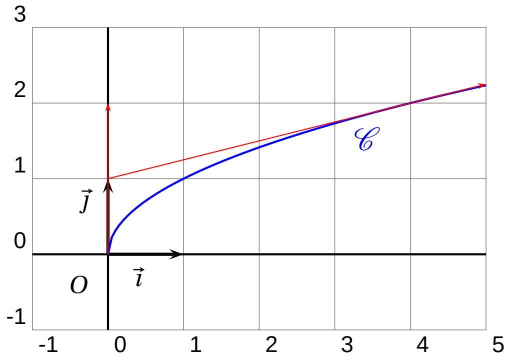



FIG. *IV.7 – Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.*

*2.* *Considérons la fonction affine $f : x \mapsto -3x+2$. Pour nombres réels $a$ et $h$, on a :*

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{-3(a+h)+2-\big(-3a+2\big)}{h} = \frac{-3h}{h} = -3.$$

*On en déduit que :*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 3.$$

*La fonction $f : x \mapsto -3x+2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto -3$.*

***Remarque*** *Plus généralement, toute fonction affine, $f : x \mapsto ax+b$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto a$.*

Traiter les exercices IV.2.k., IV.2.l. et IV.2.m.

### IV.2.3 Exercices

**IV.2.a.** Soit $f$ la fonction représentée par la courbe de la figure IV.6. Pour chacun des nombres suivant, préciser si $f$ est dérivable en ce nombre et si oui préciser le nombre dérivé : $-4$ ; $-2$ ; $-1$ ; 0 ; 1 ; 2 ; 4 ; 5.

**IV.2.b.** La fonction $f : x \mapsto -2x+3$ est-elle dérivable en 5 ? Préciser s'il y a lieu le nombre dérivé de $f$ en 5.

**IV.2.c.** La fonction $f$, définie à l'exercice IV.1.g. est-elle dérivable en 2 ? Préciser s'il y a lieu le nombre dérivé de $f$ en 2.

**IV.2.d.** La fonction $f$, définie à l'exercice IV.1.h. est-elle dérivable en 4 ? Préciser s'il y a lieu le nombre dérivé de $f$ en 4.

**IV.2.e.** $\mathscr{C}_f$ est la courbe de la fonction $f$, définie à l'exercice IV.1.g.. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

**IV.2.f.** $\mathscr{C}_f$ est la courbe de la fonction $f$, définie à l'exercice IV.1.h.. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.

**IV.2.g.** $f$ est la fonction représentée par la courbe de la figure IV.6
Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 5. En déduire $f(5)$

**IV.2.h.** $f$ est la fonction représentée par la courbe de la figure IV.6
Utiliser le théorème IV.2.1 et les résultats obtenus en IV.2.a. pour déterminer les équations réduites des tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses : $-4$ ; $-1$ ; 0 ; 2 et 4.

**IV.2.i.** On admet que le nombre dérivé de la fonction $f$ : $x \mapsto \sqrt{x}$ en 2500 est $\dfrac{1}{100}$.
Déterminer sans calculatrice une valeur approchée de $\sqrt{25001}$, puis (avec une calculatrice) majorer l'erreur commise.

**IV.2.j.** On admet que le nombre dérivé de la fonction $f$ : $x \mapsto 3x^2-5x+1$ en 2 est 7.
Déterminer sans calculatrice des valeurs approchées de $x$ apparaissant à la première ligne du tableau IV.1, puis majorer l'erreur commise.

**IV.2.k.** Préciser l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la fonction affine $f : x \mapsto -2x+3$.

**IV.2.l.** Préciser l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la fonction affine $f : x \mapsto 7x-5$.

**IV.2.m.** Préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction $f$ représentée par la courbe de la figure IV.6.

## IV.3 Calcul de dérivées

### IV.3.1 Classification des principales fonctions usuelles

**Fonctions constantes** Fonctions du type $x \mapsto p$ où $p$ est un nombre fixé. Par exemple les fonctions $x \mapsto 0$, $x \mapsto 2$, $x \mapsto -\pi$ et $x \mapsto \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ sont des fonctions constantes.

**Fonctions linéaires** Fonctions du type $x \mapsto mx$ où $m$ est un nombre fixé. Par exemple les fonctions $x \mapsto 2x$, $x \mapsto x$ (on a ici $m = 1$), $x \mapsto -\pi x$, $x \mapsto \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x$ et $x \mapsto 0$ (on a ici $m = 0$) sont des fonctions linéaires.
La seule fonction à la fois linéaire et constante est la fonction nulle.

**Fonctions affines** Fonctions du type $x \mapsto mx + p$ où $m$ et $p$ sont des nombres fixés.
Les fonctions constantes sont des cas particuliers de fonctions affines (il suffit de prendre $m = 0$).
Les fonctions linéaires sont des cas particuliers de fonctions affines (il suffit de prendre $p = 0$).
Par exemple les fonctions $x \mapsto 2x+3$, $x \mapsto -x$, $x \mapsto -5$, $x \mapsto 0$ et $x \mapsto -x\sqrt{2}+\pi$ sont des fonction affines.
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées, cette droite coupe cet axe au point d'ordonnée $p$ (ordonnée à l'origine).
Lorsque $m > 0$ la fonction est strictement croissante et lorsque $m < 0$ la fonction est strictement décroissante.

**Fonctions monômes** Fonctions du type $x \mapsto ax^n$ où $a$ est un réel non nul et $n$ un entier naturel.
$a$ est le coefficient du monôme et $n$ le degré.
Par exemple $x \mapsto \pi x^5$ est la fonction monôme de coefficient $\pi$ et de degré 5.
Les fonctions linéaires non nulles sont les fonctions monômes degré 1.
Les fonctions constantes non nulles sont les fonctions monômes degré 0.

**Fonctions polynômes** Sommes finies de fonctions monômes.
La fonction $x \mapsto -7x^5 + 3x - 1$ est une fonction polynôme de degré 5. Cette fonction est la somme de trois fonctions monômes.
Plus généralement, le monôme de plus haut degré est appelé monôme dominant et son coefficient est appelé coefficient dominant du polynôme.
Les fonctions monômes sont des cas particuliers de fonctions polynômes.
Les fonctions affines sont des cas particuliers de fonctions polynômes.
Les fonctions polynômes de degré 1 sont des fonctions affines.
Les fonctions polynômes de degré 0 sont des fonctions constantes.
La représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe des ordonnées.

**Fonctions homographiques** Les fonctions homographiques sont les fonctions qui peuvent s'écrire comme le quotient de deux fonctions affines, ce sont donc les fonctions du type : $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$.
Lorsque $c = 0$ et $d = 1$, nous constatons que les fonctions affines sont des cas particuliers de fonctions homographiques.
Les fonctions $x \mapsto \dfrac{2x-3}{x-2}$ ; $x \mapsto 2x-3$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont des exemples de fonctions homographiques.
Lorsque $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$, la représentation graphique de la fonction homographique $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est une hyperbole dont les asymptotes ont pour équation : $x = -\dfrac{d}{c}$ et $y = \dfrac{a}{c}$.

**Fonctions rationnelles** Les fonctions rationnelles sont les fonctions qui peuvent s'écrire comme le quotient de deux fonctions polynômes, ce sont donc les fonctions du type : $x \mapsto \dfrac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$.
Par exemple,la fonction $x \mapsto \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 2x - 3}{3x^2 - x - 2}$ est une fonction rationnelle.
Les fonctions homographiques et les fonctions polynômes sont des cas particuliers de fonctions rationnelles.

### IV.3.2 Formules de base

Nous admettons les formules données dans les tableaux IV.3 et IV.4. Ces formules sont utilisées pour justifier la dérivabilité d'une fonction sur un ensemble et pour déterminer l'expression de la dérivée de la fonction sur l'ensemble.

| $f$ | $f'$ | Ensemble de dérivabilité |
|---|---|---|
| $x \mapsto k$ $(k \in \mathbb{R})$ | $x \mapsto 0$ | $]-\infty;+\infty[$ |
| $x \mapsto x$ | $x \mapsto 1$ | $]-\infty;+\infty[$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x}$ | $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ | $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ | $x \mapsto -\frac{2}{x^3}$ | $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ |
| $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^\star)$ | $x \mapsto nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}^\star$ si $n<0$ ; $\mathbb{R}$ si $n>0$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$ | $x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$ | $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ |
| $x \mapsto \sqrt{x}$ | $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0;+\infty[$ |
| $x \mapsto \sin x$ | $x \mapsto \cos x$ | $]-\infty;+\infty[$ |
| $x \mapsto \cos x$ | $x \mapsto -\sin x$ | $]-\infty;+\infty[$ |
| $x \mapsto \tan x$ | $x \mapsto 1+\tan^2 x$ | $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ |

TAB. IV.3 – Dérivées des fonctions élémentaires

| $f$ | $f'$ |
|---|---|
| $u+v$ | $u'+v'$ |
| $ku$ | $ku'$ |
| $uv$ | $u'v+uv'$ |
| $\frac{1}{v}$ | $-\frac{v'}{v^2}$ |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ |

TAB. IV.4 – Dérivées et opérations sur les fonctions

Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. (Elle n'est pas dérivable en 0).

***Remarque*** *D'après la quatrième formule du tableau IV.3 et la seconde du tableau IV.4, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}^\star$ :* $(ax^n)' = nax^{n-1}$.

***Exemples***

**1.** *On se propose de calculer la dérivée de $x \mapsto x^3$.*
*Il suffit d'appliquer la quatrième formule du tableau IV.3 ; on a :* $(x^3)' = 3x^2$.

**2.** *De même :* $(7x^3)' = 7 \times 3x^2 = 21x^2$.

**3.** *On a :* $(-4)' = 0$.

**4.** *On a :* $(7x^3 - 5x^2 + 3x - 4)' = 21x^2 - 10x + 3$.

**5.** *On se propose de calculer la dérivées de $x \mapsto \frac{7}{x^3}$.*

***1re méthode avec la cinquième formule du tableau IV.3***

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)' = -\frac{3}{x^4}.$$

***2e méthode avec la quatrième formule du tableau IV.3***

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)' = \left(x^{-3}\right)' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}.$$

Traiter les exercices : IV.3.a. ; IV.3.b. et IV.3.c.

### IV.3.3 Exercices

**IV.3.a.** Pour chacune des fonctions suivantes, préciser l'ensemble de dérivabilité et calculer la fonction dérivée.
$f_0 : x \mapsto 0$.
$f_1 : x \mapsto x$.
$f_2 : x \mapsto 7x - 5$.
$f_3 : x \mapsto 3x^4 - 5x^3 + 7x - 5$.
$f_4 : x \mapsto -6x^4 + 6x^3 + 4x - 9$.
$f_5 : x \mapsto (2x-3)\sqrt{x}$.
$f_6 : x \mapsto \frac{1}{3x+1}$.

**IV.3.b.** Pour chacune des fonctions suivantes, préciser l'ensemble de dérivabilité et calculer la fonction dérivée.
$f_0 : x \mapsto (7x-5)(3x^2-5x+1)$.
$f_1 : x \mapsto \frac{2x-1}{3x-4}$.
$f_2 : x \mapsto \frac{-3x^2+2x-1}{x^2+3x-4}$.
$f_3 : x \mapsto 5x^4 - 5x^3 + 7x - 5 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2} + \frac{7}{x^3}$.
$f_4 : x \mapsto \frac{-6x^4+6x^3+4x-9}{x^3}$.
$f_5 : x \mapsto (x^5)\sqrt{x}$.

**IV.3.c.** Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère la fonction

$$f : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 24x - 1$$

et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

**1.** Calculer, pour tout nombre réel $x$, $f'(x)$.

**2.** Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$, $T_2$, au point d'abscisse 2.

**3.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f'(x) = 0$. Interpréter graphiquement les solutions.

## IV.4 Applications

### IV.4.1 Sens de variation et signe de la dérivée

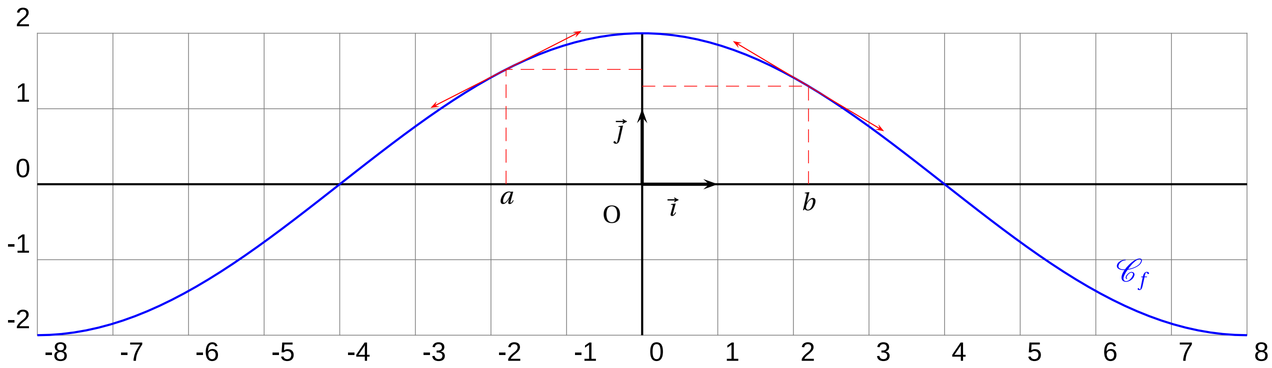



FIG. IV.8 – Courbe représentative d'une fonction $f$.

Sur la figure IV.8, on constate que la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $[-8;0]$. Si on choisit un nombre, $a$, dans cet intervalle ; on constate que le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a$ est strictement positif : $f'(a) > 0$.

On constate que la fonction $f$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;8]$. Si on choisit un nombre, $b$, dans cet intervalle ; on constate que le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $b$ est strictement négatif : $f'(b) < 0$.

Plus généralement, nous admettons le théorème suivant.

**THÉORÈME IV.4.1**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si $f' > 0$ sur I (sauf peut-être en un nombre fini de points), alors $f$ est strictement croissante sur I ;
- si $f' < 0$ sur I (sauf peut-être en un nombre fini de points), alors $f$ est strictement décroissante sur I ;
- si $f'$ est nulle sur I, alors $f$ est constante sur I.

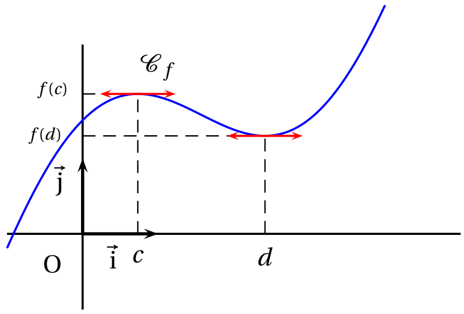
***Remarque*** *De même si $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$) sur I, alors $f$ est croissante (resp. décroissante) sur I.*

***Exemple*** *La fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et sa dérivée est strictement positive sur $]0;+\infty]$ ; donc $f$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.*

Pour étudier le sens de variation d'une fonction $f$ dérivable sur son ensemble de définition, il suffit donc d'étudier le signe de la dérivée afin de déterminer les intervalles où elle est de signe constant.

***Remarque*** *La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a une dérivée strictement négative sur son ensemble de définition et pourtant la fonction $f$ n'est pas décroissante. L'ensemble de définition de $f$ n'est pas un intervalle.*
*Cependant la fonction $f$ est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;\infty[$.*

### IV.4.2 Extremum local




Sur la figure ci-contre :

– $f(c)$ est maximum local de $f$ ;
– $f(d)$ est minimum local de $f$.

On dit également que $f$ admet un maximum en $c$ et un minimum en $d$.

**THÉORÈME IV.4.2**
Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle *ouvert* I. $f$ admet un extremum local en $a$ si et seulement si $f'$ s'annule et change de signe en $a$.

***Remarque*** *Plus généralement, il est d'usage de marquer les coordonnées des* points critiques [2] *et de tracer la tangente horizontale en ces points.*

### IV.4.3 Étude de fonction et représentation graphique

Pour étudier une fonction $f$ :

– on identifie l'ensemble de définition de $f$ (si $D_f$ n'est pas indiqué dans l'énoncé, on le détermine) ;
– on détermine la dérivée de $f$ (voir § IV.3.2 page 65) ;
– on étudie le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de $x$ ;
– on en déduit le tableau de variation de $f$.

Pour tracer $\mathscr{C}_f$ :

– on détermine les abscisses minimales et maximales ainsi que les ordonnées minimales et maximales des points de la courbe afin de cadrer le graphique (pour une fonction positive définie sur $]-\infty;0]$, on placera l'origine en bas à droite de la fenêtre plutôt qu'au centre) ;
– on trace le repère en respectant les éventuelles consignes sur les unités fournies dans l'énoncé.
– on place avec soin les points de la courbe dont l'abscisse est solution de l'équation : $f'(x) = 0$ ;
– on trace la tangente horizontale en ces points et on marque leurs coordonnées (voir § IV.4.2) ;
– on place avec soin les éléments ayant fait l'objet de questions ;
– on ajoute éventuellement quelques points (généralement facultatif) ;
– on trace une courbe compatible avec le tableau de variation et les éventuelles autres questions.

Pour vérifier que la courbe est bien tracée :

– on vérifie que les points critiques sont correctement placés, que leurs coordonnées sont marquées et que les tangentes horizontales sont tracées ;
– on vérifie que le graphique est suffisant pour retrouver le tableau de variations de la fonction ainsi que toutes les réponses aux questions « graphiques ».

***Exercice IV.4.1.*** ***Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).***
***On considère la fonction, $f : x \mapsto \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - 2$, définie sur $[0;5]$.***
***1. Justifier que $f$ est dérivable sur $[0;5]$ et calculer sa dérivée.***
***2. a. Étudier le signe de $f'$.***
***b. En déduire le sens de variation de $f$.***
***c. Dresser le tableau de variation de $f$.***
***3. On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ et par I le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 2.***
***a. Déterminer l'équation réduite de la tangente,T, à $\mathscr{C}_f$ en I.***
***b. On considère la fonction, $h : x \mapsto \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 2$, démontrer que $h$ est strictement croissante sur $[0;5]$.***
***c. Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T.***
***4. Tracer $\mathscr{C}_f$.***

***Solution*** ***1.*** *La fonction $f$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $[0;5]$ et sa dérivée est définie par :*

$$\boxed{f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{3}{4}\left(x^2 - 4x + 3\right)}.$$

[2] Dans ce cours, les points critiques de la courbe sont les points dont l'abscisse annule la dérivée de la fonction étudiée (ce sont les points où la tangente à la courbe est horizontale).

***2. a.*** *$f'$ est polynôme du second degré, calculons le discriminant.*
$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 = 2^2$. *On a $\Delta > 0$ donc $f'$ a deux racines :*

$$x_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \qquad \textit{et} \qquad x_2 = \frac{4+2}{2} = 3.$$

*Le coefficient $\frac{3}{4}$ est positif, $f'(x)$ est donc positif à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur, on en déduit le tableau de signes suivant :*

| $x$ | 0 | | 1 | | 3 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

***b.*** *D'après **1.a.** :*

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{\textit{la fonction } } \boldsymbol{f} \textbf{\textit{ est strictement décroissante sur }} [1\,;3] \\ \textbf{\textit{et strictement croissante sur }} [0\,;1] \textbf{\textit{ et sur }} [3\,;5]\end{array}}$$

***c.*** *On a : $f(0) = -2$ ; $f(1) = -1$ ; $f(3) = -2$ et $f(5) = 3$ ; on en déduit le tableau de variation ci-dessous.*

| $x$ | 0 | | 1 | | 3 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-2$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $3$ |

***3. a.*** *La tangente T a pour équation :*

$$y = f'(2)(x-2) + f(2).$$

*On a : $f(2) = -\frac{3}{2}$ et $f'(2) = -\frac{3}{4}$ ; donc T a pour équation réduite :*

$$\boxed{\boldsymbol{y = -\frac{3}{4}x}}.$$

***b.*** *La fonction $h$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $[0;5]$ et sa dérivée est définie par : $h'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 = \frac{3}{4}\left(x^2 - 4x + 4\right) = \frac{3}{4}(x-2)^2$.*
*On a : $f' > 0$ sur $[0;5]$ sauf en en 2 où elle est nulle ; donc :*

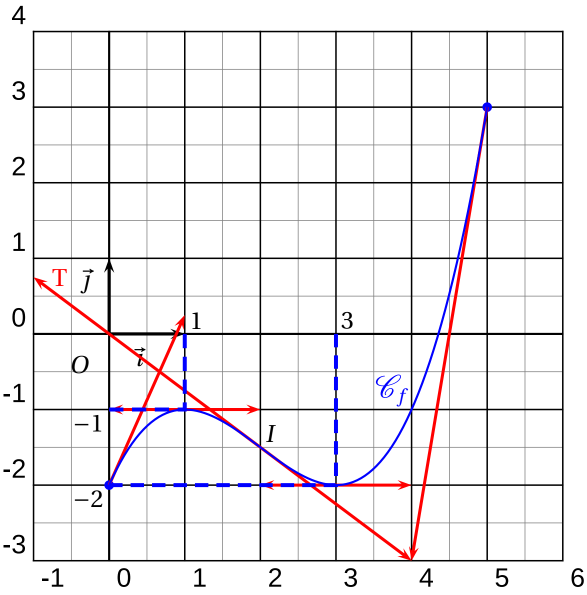
$$\boxed{\boldsymbol{h} \textbf{\textit{ est strictement croissante sur }} [\mathbf{0}\,;\mathbf{5}].}$$

***c.*** *La position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T est déterminée par le signe de $f(x) - \left(-\frac{3}{4}x\right)$.*
$f(x) - \left(-\frac{3}{4}x\right) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - 2 + \frac{3}{4}x = h(x)$.
*Le point de contact entre la courbe et la tangente a pour abscisse 2, donc : $h(2) = 0$. De plus $h$ est strictement croissante sur $[0;5]$, on en déduit le signe de $h$.*

| $x$ | 0 | | 2 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | − | 0 | + | |

$$\boxed{\textbf{\textit{La courbe }} \mathscr{C}_f \textbf{\textit{ est au-dessus de T sur [2 ;5] et au-dessous de T sur [0 ;2]}}}$$

***4.*** *On déduit la courbe suivante de l'étude ci-dessus et de : $f'(0) = \frac{9}{4}$ et $f'(5) = -6$.*




□

### IV.4.4 Démonstration d'inégalités

***Exercice IV.4.2.*** ***(Inégalité de Bernoulli)***
***Soit $x$ un élément de $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ et $n$ un nombre entier tel que : $n>1$. Démontrer que :***

$$(1+x)^n > 1+nx.$$

***Solution*** *Considérons la fonction $d : x \longmapsto (1+x)^n - nx - 1$. Il suffit de démontrer que $d$ est strictement positive sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$.*
*La fonction $d$ est polynôme de degré $n$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est définie par :*

$$d'(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n\left((1+x)^{n-1} - 1\right).$$

*On sait que $n$ est strictement positif, donc pour tout nombre réel, $x$, $d'(x)$ est du signe de : $(1+x)^{n-1} - 1$.*
*On a : $d'(x) = n(1+0)^{n-1} - n = 0$.*
*Pour $x \in ]-1;0[$, on a : $0 < 1+x < 1$ ; donc par produit de $n-1$ inégalités entre nombres positifs : $(1+x)^{n-1} < 1^{n-1}$ ; d'où il vient : $d'(x) < 0$.*
*La fonction $d$ est donc strictement décroissante sur $]-1;0]$.*
*Pour $x \in ]0;+\infty[$, on a : $1 < 1+x$ ; donc par produit de $n-1$ inégalités entre nombres positifs : $1^{n-1} < (1+x)^{n-1}$ ; d'où il vient : $d'(x) > 0$.*
*La fonction $d$ est donc strictement croissante sur $]0;+\infty]$.*
*La fonction $d$ est strictement décroissante sur $]-1;0]$ et strictement croissante sur $]0;+\infty]$ elle présente donc un minimum sur $]-1;+\infty[$ atteint uniquement en $0$. Or : $d(0) = (1+0)^n - n\times 0 - 1 = 0$ ; donc la fonction $d$ est strictement positive sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$, ce qui démontre l'inégalité de Bernoulli[3].* □

M Pour démontrer une inégalité du type : $f \geqslant g$ sur un intervalle I, il suffit d'étudier les variations de $f-g$ sur I et de constater que $f-g$ est minorée par 0 sur I.

[3] Jacques I$^{\text{er}}$ Bernoulli 1654-1705 mathématicien suisse

# Chapitre V

# Produit scalaire

## V.1 Introduction

### V.1.1 Rappels

Lors de la leçon sur le repérage dans le plan et dans l'espace, nous avons vu ou revu que :

– pour tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ du plan muni d'une base orthonormée, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ ;

– pour tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de l'espace muni d'une base orthonormée, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ;

***Remarque*** *Dans le plan muni d'une base orthonormée, les coordonnées,* $(x\,;y)$ *d'un vecteur dépendent de la base orthonormée dans laquelle elles sont exprimées, mais le nombre* $\sqrt{x^2+y^2}$ *reste invariant par un changement de base orthonormée.*

### V.1.2 Définitions

**LEMME V.1.1**

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan muni d'une base orthonormée.

$$xx' + yy' = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right).$$

**Démonstration**

$$\begin{aligned}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right) &= \left(x^2+y^2\right) + \left(x'^2+y'^2\right) - \left(\left(x-x'\right)^2 + \left(y-y'\right)^2\right) \\ &= x^2+y^2+x'^2+y'^2 - \left(x^2-2xx'+x'^2+y^2-2yy'+y'^2\right) \\ &= 2(xx'+yy')\end{aligned}.$$

□

***Remarque*** *Ce lemme signifie que le nombre* $xx'+yy'$ *ne dépend que des vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *et est indépendant de la base orthonormée dans laquelle leurs coordonnées sont exprimées, il justifie ainsi la cohérence de la définition suivante.*

**DÉFINITION V.1.1**

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan muni d'une base orthonormée.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel noté, $\vec{u}\cdot\vec{v}$, défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'.$$

***Remarque*** *Le produit scalaire est indépendant de la base orthonormée choisie.*

***Notations et vocabulaire*** *Le carré scalaire de $\vec{u}$ est le nombre noté, $\vec{u}^2$, défini par :* $\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2$.

**THÉORÈME V.1.2**

Pour tous points A, B, C du plan :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right).$$

**Démonstration** D'après la définition V.1.1 et le lemme V.1.1 :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right).$$

□

**THÉORÈME V.1.3**

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u}=\vec{0} \text{ ou } \vec{v}=\vec{0} \\ \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{u}\right\| \times \cos(\vec{u};\vec{v}) & \text{si } \vec{u}\neq\vec{0} \text{ et } \vec{v}\neq\vec{0} \end{cases}$$

**Démonstration** Si $\vec{u}=\vec{0}$, alors : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{0}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{0}-\vec{v}\|^2\right) = 0$. Si $\vec{v}=\vec{0}$, alors : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{0}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{0}\|^2\right) = 0$.

Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$, déterminons les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans une base orthonormée directe bien choisie. Posons : $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$.

Orientons le plan dans le sens trigonométrique et désignons par $\vec{e}_2$ le vecteur unitaire tel que : $(\vec{e}_1;\vec{e}_2) = \frac{\pi}{2}$.

La base $(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est une base orthonormée directe relativement à laquelle les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont respectivement pour coordonnées : $(\|\vec{u}\|;0)$ et $(\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v});\|\vec{v}\|\sin(\vec{u};\vec{v}))$. Nous en déduisons que :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v}) + 0 \times \|\vec{v}\|\sin(\vec{u};\vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v}).$$

□

**Cas particuliers**

**1.** Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors : $\cos(\vec{u};\vec{v}) = 1$ ; d'où : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\|$.

**2.** Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires, alors : $\cos(\vec{u};\vec{v}) = -1$ ; d'où : $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\|$.

**3.** si $(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\vec{u};\vec{v}) = -\frac{\pi}{2}$, alors : $\cos(\vec{u};\vec{v}) = 0$ ; d'où : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Les deux premiers cas peuvent être regroupés en un seul. Soit M un point d'une droite (AB) orientée de A vers B.


$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = AB \times AM = \overline{AB} \times \overline{AM}$$


$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -AB \times AM = \overline{AB} \times \overline{AM}$$

Le dernier cas nous amène à formuler la définition suivante.

**DÉFINITION V.1.2**

Deux vecteurs orthogonaux sont deux vecteurs dont le produit scalaire est nul.

***Remarques***

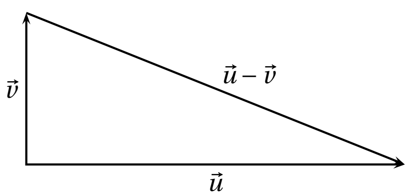
***1.*** *Nous avons donc pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ :*

$$\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0.$$

***2.*** *$\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.*

***3.*** *Nous avons donc pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ :*

$$\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right) = 0 \iff \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}-\vec{v}\|^2.$$

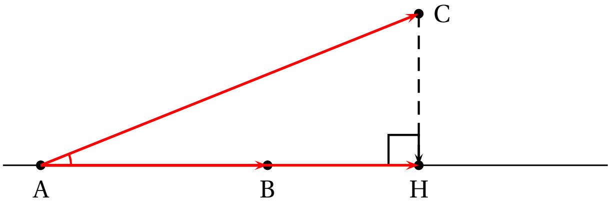


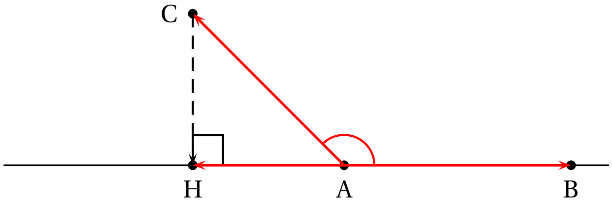

*Le théorème de Pythagore et sa réciproque sont ainsi étendus aux vecteurs du plan.*

**Interprétation graphique** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan et A, B, C des points tels que : $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
Introduisons le projeté orthogonal, H, du point C sur la droite (AB).
Reprenons les notations du théorème V.1.3 et munissons le plan du repère $(A; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.
Il vient : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}AB\\0\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}AC\cos\left(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\right)\\AC\sin\left(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\right)\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}AC\cos\left(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\right)\\0\end{pmatrix}$.
Les angles $\left(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\right)$ et $\widehat{BAC}$ ont le même cosinus, donc $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées : $\left(AC\cos\widehat{BAC}; 0\right)$.
Nous en déduisons que :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}.$$

S'il n'est pas droit, l'angle $\widehat{BAC}$ est soit aigu soit obtus .




$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC} = AB\times AH = \overline{AB}\times\overline{AH}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC} = -AB\times AH = \overline{AB}\times\overline{AH}$

Dans tous les deux cas nous avons :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = \overline{AB}\times\overline{AH}.$$

Nous en déduisons le théorème suivant.

**Théorème V.1.4**
Soit A, B, C trois points tels que B et C soient distincts de A et H le projeté orthogonal de C sur la doite (AB).

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = \overline{AB}\times\overline{AH}.$$

***Remarques***

***1.*** *$\widehat{BAC}$ est aigusi, et seulement si, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} > 0$.*

***2.*** *$\widehat{BAC}$ est obtus si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} < 0$.*

# V.2 Propriétés

## V.2.1 Propriétés fondamentales

**Théorème V.2.1**
Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ du plan et tout nombre réel $\lambda$, on a :

**(1)** $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ ;

**(2)** $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$ ;

**(3)** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ ; on dit que le produit scalaire est symétrique ;

**(4)** $\vec{u}^2 = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ; on dit que le produit scalaire est défini ;

**(5)** $\vec{u}^2 \geqslant 0$ ; on dit que le produit scalaire est positif.

**Démonstration** Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ du plan ; $(x; y)$ ; $(x'; y')$ ; $(x''; y'')$ leurs coordonnées respectives dans une base orthonormée et $\lambda$ un nombre réel.

**(1)** $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = x\left(x'+x''\right)+y\left(y'+y''\right) = \left(xx'+yy'\right)+\left(xx''+yy''\right) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ ;

**(2)** $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = x\times\lambda x'+y\times\lambda y' = \lambda\left(xx'+yy'\right) = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$ ;

**(3)** $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy' = x'x+y'y = \vec{v}\cdot\vec{u}$ ;

**(4)** nous savons qu'une somme de nombres positifs est nulle si, et seulement si tous les nombres sont nuls, nous en déduisons que :
$\vec{u}^2 = 0 \iff x^2+y^2 = 0 \iff (x; y) = (0; 0) \iff \vec{u} = \vec{0}$ ;

**(5)** On sait que : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ ; donc : $\vec{u}^2 \geqslant 0$. □

***Remarque*** *Nous tirons des trois premières propriétés que pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ du plan et tous nombres réels $\alpha, \beta$ : $\vec{u} \cdot (\alpha\vec{v} + \beta\vec{v}) = \alpha\vec{u} \cdot \vec{v} + \beta\vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \cdot \vec{w} = \alpha\vec{u} \cdot \vec{w} + \beta\vec{v} \cdot \vec{w}$.*
*On dit que le produit scalaire est bilinéaire.*

## V.2.2 Autres propriétés

### V.2.2.a Identités remarquables

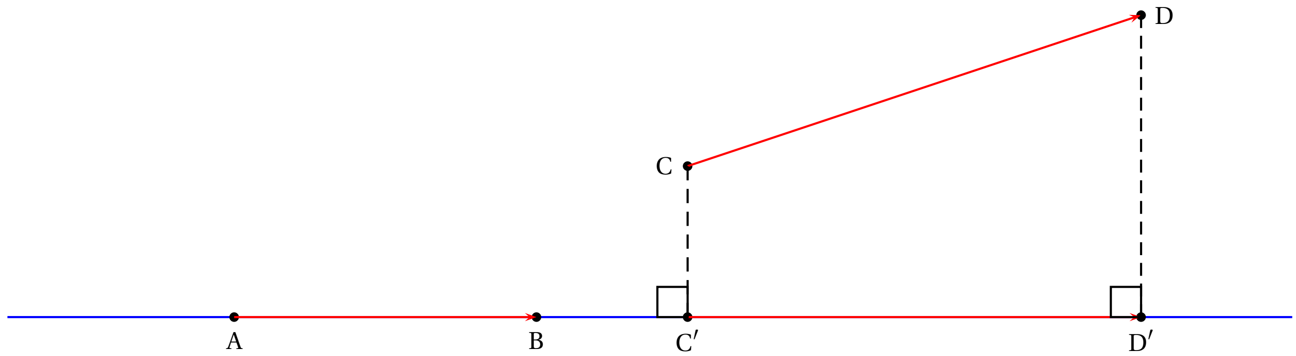
**Théorème V.2.2**
Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ du plan :
**(1)** $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ ;
**(2)** $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ ;
**(3)** $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$ ;

**Démonstration** Ces trois propriétés se démontrent de la même façon, par application du théorème V.2.1 démontrons la première :
$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ □

**Corollaire V.2.3**
Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ du plan :
**(1)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2\right)$ ;
**(2)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left((\vec{u} + \vec{v})^2 - \vec{u}^2 - \vec{v}^2\right)$ ;

**Démonstration** Ces propriétés sont équivalentes aux propriétés **(1)** et **(2)** du théorème V.2.2 ; mais **(1)** peut aussi se déduire du lemme V.1.1 et de la définition V.1.1. □

### V.2.2.b Produit scalaire et projection orthoganale




**Théorème V.2.4**
Soit A, B deux points d'une droite et C′, D′ les projetés orthogonaux respectifs de deux points C et D sur cette droite.
On a :
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}.$$

**Démonstration** Les vecteurs $\overrightarrow{CC'}$ et $\overrightarrow{D'D}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{AB}$, donc en utilisant la relation de Chasles, il vient :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D}\right) = \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'}}_{=0} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'D}}_{=0}$. □

### V.2.2.c Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

Soit $\vec{u}$ un vecteur dont on cherche les coordonnées, $(x ; y)$ dans une base orthonormée $(\vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$.
On a : $\vec{u} \cdot \vec{e}_1 = \left(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2\right) = x\vec{e}_1{}^2 = x$ et $\vec{u} \cdot \vec{e}_2 = \left(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2\right) = y\vec{e}_2{}^2 = y$.
Nous en déduisons le théorème suivant.

**Théorème V.2.5**
Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ relativement a une base orthonormée $(\vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$ du plan sont :
$$(\vec{u} \cdot \vec{e}_1 ; \vec{u} \cdot \vec{e}_2).$$

**Exercice V.2.1.** ***Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère les vecteurs $\vec{e}_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\vec{e}_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.***

***1. Démontrer que $(0;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est un repère ortonormé.***

***2. Déterminer les coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$***

***3. Soit M un point du plan, $(x;y)$ ses coordonnées dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $(X;Y)$ ses coordonnées dans le repère $(0;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.***
***Exprimer $x$ et $y$ en fonction de X et Y.***

***4. Un ensemble $\mathscr{H}$ a pour équation, $x^2-y^2=-2$, dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.***
***Déterminer une équation de $\mathscr{H}$ dans le repère $(0;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.***

***Solution 1.*** *On a :* $\vec{e}_1^{\,2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ ; $\vec{e}_2^{\,2}=\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$
*et* $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$ *; donc :* $\|\vec{e}_1\|=\|\vec{e}_2\|=1$ *et* $\vec{e}_1\perp\vec{e}_2$.

$$\boxed{(0;\vec{e}_1,\vec{e}_2) \text{ est un repère orthonormé.}}$$

***2.***

**1$^{\text{re}}$ méthode** *On a :* $\begin{cases}\vec{e}_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}\\ \vec{e}_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}\end{cases}$ *; donc :* $\begin{cases}\vec{e}_1+\vec{e}_2=\sqrt{2}\vec{\jmath}\\ \vec{e}_1-\vec{e}_2=\sqrt{2}\vec{\imath}\end{cases}$ *; d'où :* $\begin{cases}\vec{\imath}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_1-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_2\\ \vec{\jmath}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_2\end{cases}$.

*Dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ :*

$$\boxed{\vec{\imath}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\quad \text{et} \quad \vec{\jmath}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.$$

**2$^{\text{e}}$ méthode** *On a :* $\vec{\imath}\cdot\vec{e}_1=1\times\frac{\sqrt{2}}{2}+0\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\vec{\imath}\cdot\vec{e}_2=1\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+0\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ *; donc dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ :*

$$\boxed{\vec{\imath}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.$$

*On a :* $\vec{\jmath}\cdot\vec{e}_1=0\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\vec{\jmath}\cdot\vec{e}_2=0\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *; donc dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ :*

$$\boxed{\vec{\jmath}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.$$

***3.*** *On a :* $x=\overrightarrow{OM}\cdot\vec{\imath}=(X\vec{e}_1+Y\vec{e}_2)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_1-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_2\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}X-\frac{\sqrt{2}}{2}Y$ *et*
$y=\overrightarrow{OM}\cdot\vec{\jmath}=(X\vec{e}_1+Y\vec{e}_2)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_2\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y$ *; donc :*

$$\boxed{\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}X-\frac{\sqrt{2}}{2}Y\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y\end{cases}}.$$

***4.*** *Soit M un point du plan, $(x;y)$ ses coordonnées relativement au repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $(X;Y)$ ses coordonnées relativement au repère $(0;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. On a :*

$$\begin{aligned}
M\in\mathscr{H} &\iff x^2-y^2=2\\
&\iff \left(\frac{\sqrt{2}}{2}X-\frac{\sqrt{2}}{2}Y\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y\right)^2=-2\\
&\iff \frac{1}{2}X^2-XY+\frac{1}{2}Y^2-\frac{1}{2}X^2-XY-\frac{1}{2}Y^2=-2\\
&\iff -2XY=-2\\
&\iff XY=1
\end{aligned}$$

*On sait que* $0 \neq 1$, *donc cette dernière équation n'a pas de solution vérifiant :* $\mathrm{X} = 0$. $\mathscr{H}$ *est l'hyperbole équilatère*[1] *d'équation :*

$$\boxed{\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{X}}}.$$

□

# V.3 Applications du produit scalaire

## V.3.1 Équation d'une droite de vecteur normal $\vec{n}$

**Définitions V.3.1**

Soit D une droite une droite du plan et M un point de D.

**(1)** La normale à D en M est la perpendiculaire à D issue de M.

**(2)** Un vecteur normal à D est un vecteur directeur d'une droite normale à D.

***Remarques***

***1.*** *Un vecteur normal à une droite est orthogonal à tous vecteur de cette droite.*

***2.*** *Pour qu'un vecteur non nul soit normal à une droite, il suffit qu'il soit orthogonal à un vecteur directeur de cette droite.*

***3.*** *En particulier, dans le plan muni d'un repère orthonormé, si* $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ *dirige une droite D, alors* $\vec{n}\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$ *est normal à D. En effet :* $\vec{u}\cdot\vec{n} = ab + b(-a) = 0$ *; donc :* $\vec{n} \perp \vec{u}$.

***4.*** *Dans le plan, dire qu'un vecteur non nul,* $\vec{n}$*, est normal à une droite, D, signifie que l'orthogonale de la direction de* $\vec{n}$ *est la direction de D.*

***5.*** *Dans l'espace, l'orthogonale de la direction d'un vecteur est une direction de plan. C'est la raison pour laquelle, dans l'espace, on ne parle pas de vecteur normal à une droite mais de vecteur normal à un plan.*

**Théorème V.3.1**

Soit $a$, $b$ deux nombres réels non tous nuls et $\mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}}\,;y_{\mathrm{A}}\right)$ un point du plan muni d'un repère orthonormé.

**(1)** La droite issue de A et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ a pour équation :

$$a\left(x - x_{\mathrm{A}}\right) + b\left(y - y_{\mathrm{A}}\right) = 0.$$

**(2)** Toute droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ a une équation de la forme :

$$ax + by + c = 0,$$

où $c$ est un nombre réel.

**(3)** Soit $c$ un nombre réel, l'ensemble d'équation : $ax + by + c = 0$ ; est une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

**Démonstration (1)** Soit $\mathrm{M}(x\,;y)$ un point du plan et D la droite issue de A et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x - x_a\\y - y_a\end{pmatrix}$, donc :

$$\mathrm{M} \in \mathrm{D} \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{n} = 0 \iff a\left(x - x_{\mathrm{A}}\right) + b\left(y - y_{\mathrm{A}}\right) = 0$$

**(2)** Soit $\mathrm{D}'$ une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}\left(x_{\mathrm{B}}\,;y_{\mathrm{B}}\right)$ un point de $\mathrm{D}'$. $\mathrm{D}'$ a pour équation : $a\left(x - x_{\mathrm{B}}\right) + b\left(y - y_{\mathrm{B}}\right) = 0$ ; c'est-à-dire, après avoir développé réduit et ordonné le premier membre : $ax + by + \underbrace{\left(-ax_{\mathrm{B}} - by_{\mathrm{B}}\right)}_{=c} = 0$.

**(3)** Désignons par E l'ensemble d'équation : $ax + by + c = 0$. Introduisons le point C de coordonnées $\begin{cases}\left(-\dfrac{c}{a}\,;0\right) & \text{si } a \neq 0\\ \left(0\,;-\dfrac{c}{b}\right) & \text{si } a = 0\end{cases}$.

Le point C est bien défini car on sait que si $a$ est nul alors $b$ ne l'est pas. De plus : $a\left(-\dfrac{c}{a}\right) + b\times 0 + c = -c + 0 + c = 0$ et $a \times 0 + b\left(-\dfrac{c}{b}\right) + c = 0 - c + c = 0$ ; donc C est un point de E[2]. Afin de ne pas avoir à discuter les cas où $a$ est nul ou non, désignons par $\left(x_c\,;y_c\right)$ es coordonnées de C. On a alors : $ax_{\mathrm{C}} + by_{\mathrm{C}} + c = 0$. Soit $\mathrm{M}(x\,;y)$ un point du plan. On a :

$$\mathrm{M} \in \mathrm{E} \iff ax + by + c = 0 \iff ax + by + c = ax_{\mathrm{C}} + by_{\mathrm{C}} + c \iff a\left(x - x_{\mathrm{C}}\right) + b\left(y - y_{\mathrm{C}}\right) = 0 \iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}} = 0 \iff \overrightarrow{\mathrm{CM}} \perp \vec{n}.$$

[1] Une hyperbole équilatère est une hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires.

[2] On dit que les coordonnées de C sont une solution particulière de l'équation de E.

E est donc la droite de vecteur normal $\vec{n}$ passant par C. □

***Remarques***

***1.*** *Pour connaître une droite, il suffit d'en connaître un point et un vecteur normal.*
*On dit qu'une droite est déterminée par un point et un vecteur normal.*

***2.*** *Considérons l'équation : $ax+by+c$ ; nous constatons que cette équation est de la forme : $f(x;y)=0$ où $f$ est la fonction : $(x;y)\longmapsto ax+by+c$. De telles équations sont dites cartésiennes. Plus généralement, toutes les équations évoquées dans l'énoncé du théorème V.3.1 sont des équations cartésiennes de droites.*

Dans la démonstration ci-dessus, l'ensemble E était défini par une équation et pour le déterminer nous avons procéder en deux étapes :

1. Nous avons déterminer une solution particulière C.
2. Nous avons injecté les coordonnées de C dans l'équation de E.

Plus généralement, cette méthode est souvent décisive pour résoudre une équation équivalente à une équation du type, $\mathrm{P}=0$, où P est une expression polynomiale de degré 1 dont les indéterminées sont les inconnues (dans la démonstration ci-dessus : $\mathrm{P}=ax+by+c$).

**THÉORÈME V.3.2**

Soit H un point d'une droite (AB). La perpendiculaire à (AB) issue de H est le lieu des points M vérifiant :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}$$

est la droite issue de H et de vecteur normal $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

**Démonstration** Soit E le lieu considéré et D la droite issue de H et de vecteur normal $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Pour tout point M du plan :

$$\mathrm{M}\in\mathrm{E}\iff\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}\iff\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right)=0\iff\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HM}}=0\iff\mathrm{M}\in\mathrm{D}.$$

Donc : E = D. □

## V.3.2 Déterminations d'un cercle

Un cercle est le plus souvent déterminer par son centre et son rayon ou par deux points diamétralement opposés.

**THÉORÈME V.3.3**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, le cercle de centre $\mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}};y_{\mathrm{A}}\right)$ et de rayon R a pour équation canonique :

$$\left(x-x_{\mathrm{A}}\right)^2+\left(y-y_{\mathrm{A}}\right)^2=\mathrm{R}^2.$$

**Démonstration** Désignons par $\Gamma$ le cercle de centre A et de R. Soit $\mathrm{M}(x;y)$ un point du plan. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix}x-x_{\mathrm{A}}\\y-y_{\mathrm{A}}\end{pmatrix}$. Nous savons que les distances sont positives, nous en déduisons que :

$$\mathrm{M}\in\Gamma\iff\mathrm{AM}=\mathrm{R}\iff\mathrm{AM}^2=\mathrm{R}^2\iff\left(x-x_{\mathrm{A}}\right)^2+\left(y-y_{\mathrm{A}}\right)^2=\mathrm{R}^2.$$

□

**THÉORÈME V.3.4**

Soit $a$, $b$, $c$ des nombres réels. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble d'équation, $x^2+y^2+ax+by+c=0$, est soit un cercle, soit un point, soit l'ensemble vide.

**Démonstration** Désignons par E cet ensemble. Soit $\mathrm{M}(x;y)$ un point du plan. On a :

$$\mathrm{M}\in\mathrm{E}\iff x^2+y^2+ax+by+c=0\iff\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c.$$

Introduisons le point $\mathrm{I}\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ ; on a :

$$\mathrm{M}\in\mathrm{E}\iff\mathrm{IM}^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c.$$

**si** $\boldsymbol{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c>0}$ $\quad\mathrm{M}\in\mathrm{E}\iff\mathrm{IM}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}.$

E est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$.

**si** $\boldsymbol{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c=0}$ $\quad\mathrm{M}\in\mathrm{E}\iff\mathrm{IM}=0.$

$\mathrm{E}=\{\mathrm{I}\}$.

**si** $\boldsymbol{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c<0}$ $\quad\mathrm{M}\in\mathrm{E}\iff\mathrm{IM}^2<0.$

E est l'ensemble vide.

□

**THÉORÈME V.3.5**

Le cercle de diamètre [AB] est le lieu des points M du plan vérifiant :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BM}}.$$

**Démonstration** Désignons par E l'ensemble des points M du plan vérifiant, $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$ et par I le milieu de [AB]. Le cercle, Γ, de diamètre [AB] est le cercle de centre I et de rayon IA. Pour tout point M du plan :

$$\begin{aligned}
M \in E &\iff \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}\\
&\iff \left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM}\right)=0\\
&\iff \left(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IA}\right)=0\\
&\iff \overrightarrow{IM}^2-\overrightarrow{IA}^2=0\\
&\iff IM^2=\overrightarrow{IA}^2\\
&\iff IM=\overrightarrow{IA}\\
&\iff M\in\Gamma.
\end{aligned}$$

Le cercle de diamètre [AB] est donc le lieu des points M du plan vérifiant : $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$. □

### V.3.3 Géométrie du triangle

Dans toute cette partie ABC désigne un triangle, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, désignent respectivement les angles géométriques $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ ; $a$, $b$, $c$ désignent respectivement les distances BC, CA et AB et $\mathscr{A}$ désigne l'aire du triangle ABC.

#### V.3.3.a Aire d'un triangle

Comme chacun sait que l'aire d'un triangle se calcule par la formule :

$$\mathscr{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}.$$

Dans le triangle ABC ci-contre, si on choisit AB pour base alors la hauteur CH est déterminée par :

$$CH = BC\cos\widehat{ABC} = a\sin\widehat{B}.$$

On en déduit que : $\mathscr{A} = \frac{1}{2}ca\sin\widehat{B}$.

Plus généralement :

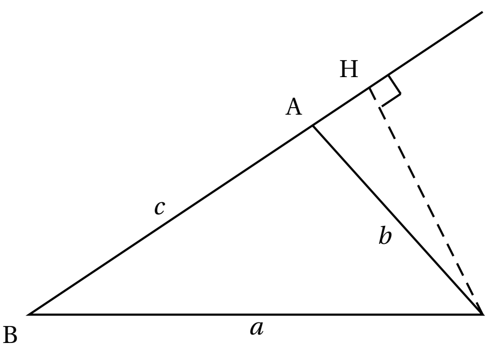



FIG. V.1 –

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ca\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} \tag{V.1}$$

#### V.3.3.b Théorème des sinus

**THÉORÈME V.3.6**
Soit ABC un triangle et $\mathscr{A}$ son aire et R le rayon de son cercle circonscrit, on a :

$$\frac{2\mathscr{A}}{abc} = \frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c} = \frac{1}{2R}.$$

**Démonstration**En multipliant (V.1) membre à membre par $\frac{2}{abc}$, il vient :

$$\frac{2\mathscr{A}}{abc} = \frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}.$$

Les trois angles du triangle ABC ne peuvent être tous droits ou obtus, car sinon leur somme serait strictement supérieure à un angle plat. On en déduit que l'un des angles au moins est aigu, par exemple $\widehat{C}$. Soit I le milieu du segment [AB] et O le centre du cercle circonscrit. Le triangle OAB est isocèle en O et, d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$. On en déduit que le triangle OBI est rectangle en I et que : $\widehat{BOI} = \widehat{C}$ ; d'où il vient : $\frac{c}{2} = BI = R\sin\widehat{C}$ ; donc : $\frac{\sin\widehat{C}}{c} = \frac{1}{2R}$. □

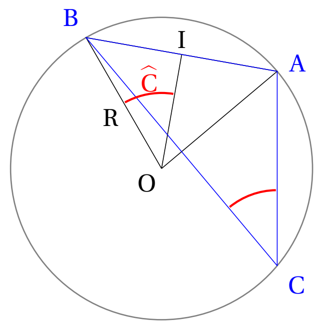



FIG. V.2 –

### V.3.3.c Théorème d'AL KASHI

**THÉORÈME V.3.7**
Soit ABC un triangle, on a :
**(1)** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$
**(2)** $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\widehat{B}$
**(3)** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$

**Démonstration (1)** On a : $a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.
On démontre de même **(2)** et **(3)**. □

***Remarques***

***1.*** *Lorsque l'un des angles est droit, on retrouve le théorème de* PYTHAGORE *; en effet si par exemple l'angle* $\widehat{A}$ *est droit,* ***(1)*** *devient :* $a^2 = b^2 + c^2$.

***2.*** *Le théorème des sinus (V.3.6) et le théorème d'*AL KASHI *(V.3.7) permettent lorsqu'elle est possible la résolution des triangles*[3].

### V.3.3.d Théorème de la médiane

**THÉORÈME V.3.8**
Soit ABC un triangle et A' le milieu de [BC], on a :
**(1)** $2AA'^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2$ ;
**(2)** $AA'^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}BC^2$.

**Démonstration (1)** On a : $$\begin{aligned} 2AA'^2 &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'}\right)^2 \\ &= \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)^2 \\ &= AB^2 + \frac{1}{4}BC^2 + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB} + AC^2 + \frac{1}{4}BC^2 + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} \\ &= AB^2 + AC^2 + \frac{1}{2}BC^2 + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CB} \\ &= AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 \end{aligned}$$

**(2)** En utilisant **(1)**, il vient : $\frac{1}{2}BC^2 = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(2AA'^2 + \frac{1}{2}BC^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$ ;
d'où l'on tire : $AA'^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}BC^2$. □

[3] Résoudre un triangle : étant donnés un certain nombre d'angles et de côtés d'un triangle, déterminer les angles et les côtés non donnés.

# Chapitre VI

# Barycentre

## VI.1 Barycentre

Les considérations envisagées dans cette partie sont valables dans le plan et dans l'espace. L'ensemble $\mathscr{W}$ désignera, suivant les besoins du lecteur, le plan $\mathscr{P}$ ou l'espace $\mathscr{E}$.

### VI.1.1 Introduction

**DÉFINITIONS VI.1.1**

**(1)** Un *point pondéré* est un couple $(\mathrm{A}, \alpha)$ où A est un point et $\alpha$ un nombre, appelé coefficient ou masse.

**(2)** Un *système de points pondérés* est une collection de points pondérés dans laquelle un même point pondéré peut apparaître plusieurs fois.

**(3)** La *masse* d'un système de points pondérés est la somme des coefficients.

***Remarque*** *La différence entre un système et un ensemble est que dans un ensemble, un même objet ne peut pas apparaître plusieurs fois.*

***Exemple*** *Soit A, B, C trois points de $\mathscr{W}$,*

$$\big\{(\mathrm{A},1),(\mathrm{B},-2),(\mathrm{C},\pi),(\mathrm{B},-2)\big\}$$

*est un système de points pondérés de masse $\pi-3$.*

### VI.1.2 Activités

M ou N désignent des points variables et A, B, C ... des points fixes.

***Exercice VI.1.1.*** ***1. Simplifier : $\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}$.***

***2. On considère le système de points pondérés $\{(\mathrm{A},2),(\mathrm{B},2)\}$. La fonction vectorielle de Leibniz qui lui est associée est $\vec{f}:\mathrm{M}\mapsto 2\overrightarrow{\mathrm{MA}}+2\overrightarrow{\mathrm{MB}}$.***
***I désigne le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$.***

***a. Simplifier $\vec{f}(\mathrm{M})$.***

***b. Soit $\vec{g}$ la fonction vectorielle de Leibniz associée à $\{(\mathrm{I},4)\}$.***
***Que peut-on dire de $\vec{f}$ et $\vec{g}$ ?***

***Exercice VI.1.2.*** ***Deux systèmes de points pondérés sont dits équivalents lorsque leurs fonctions vectorielles de Leibniz sont égales. Soit ABC un triangle et $\vec{f}$ la fonction vectorielle de Leibniz associée au système $\{(\mathrm{A},1),(\mathrm{B},1),(\mathrm{C},1)\}$.***

***1. Donner l'expression de $\vec{f}(\mathrm{M})$.***

***2. Démontrer que pour tous points M et N de $\mathscr{W}$ :***

$$\vec{f}(\mathrm{M})=\vec{f}(\mathrm{N})+3\overrightarrow{\mathrm{MN}}.$$

***3. Résoudre l'équation $\vec{f}(\mathrm{M})=\vec{0}$.***

***4. Déterminer un système réduit à un seul point pondéré équivalent à $\{(\mathrm{A},1),(\mathrm{B},1),(\mathrm{C},1)\}$.***

***5. Quel lien existe-t-il entre $\vec{f}$ et la fonction vectorielle de Leibniz, $\vec{g}$, associée à $\{(\mathrm{A},2),(\mathrm{B},2),(\mathrm{C},2)\}$.***

***Le point G, centre de gravité de ABC, est aussi appelé isobarycentre des points A, B, C.***

***Exercice VI.1.3.*** ***ABCD est parallélogramme de centre I. On considère le système S : $\{(\mathrm{A},1),(\mathrm{B},-1),(\mathrm{C},1)\}$ ; et $\vec{f}$ sa fonction vectorielle de Leibniz associée.***

***Lorsqu'un système a une masse non nulle, l'unique solution de l'équation $\vec{f}(\mathrm{M}) = \vec{0}$ est appelée barycentre du système.***

***1. Déterminer le barycentre de S.***

***2. Simplifier $\vec{f}(\mathrm{M})$.***

***3. Que peut-on dire des systèmes $\{(\mathrm{A},1),(\mathrm{C},1)\}$ et $\{(\mathrm{I},2)\}$***

***4. Que peut-on dire des systèmes S et $\mathrm{S}'$ : $\{(\mathrm{I},2),(\mathrm{B},-1)\}$***

***5. Justifier que S et $\mathrm{S}'$ ont le même barycentre.***

***6. Plus généralement énoncer un théorème.***

**Exercice VI.1.4.** ***ABCD est un parallélogramme de centre I. On considère les systèmes $\{(\mathrm{A},-2),(\mathrm{B},1)(\mathrm{C},1)\}$ et $\mathrm{S}'$ : $\{(\mathrm{A},1),(\mathrm{B},-1),(\mathrm{C},1),(\mathrm{D},-1)\}$ ; ainsi que leurs fonctions vectorielles de Leibniz respectives $\vec{f}$ et $\vec{f}'$.***

***1. Préciser la masse des systèmes S et $\mathrm{S}'$.***

***2. Démontrer que $\vec{f}$ et $\vec{f}'$ sont des fonctions constantes.***

***3. Résoudre $\vec{f}(\mathrm{M}) = \vec{0}$ puis $\vec{f}'(\mathrm{M}) = \vec{0}$.***

***4. Énoncer un théorème sur les systèmes de points pondérés de masse nulle et les fonctions vectorielles de Leibniz constantes.***

## VI.1.3 Définition et propriétés

**DÉFINITION VI.1.2**

Soit $\{(\mathrm{A}_i,\alpha_i) \mid i \in [\![1,n]\!]\}$ un système de points pondérés. La fonction vectorielle de LEIBNIZ qui lui est associée est la fonction, $\vec{f}$, qui à tout point M de $\mathscr{W}$ associe le vecteur $\vec{f}(\mathrm{M})$ défini par :

$$\vec{f}(\mathrm{M}) = \alpha_1\overrightarrow{\mathrm{MA}_1} + \alpha_2\overrightarrow{\mathrm{MA}_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{\mathrm{MA}_n} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{\mathrm{MA}_i}.$$

***Exemple*** *Soit A et B deux points de $\mathscr{W}$, I le milieu du segment [AB] et $\vec{f}$ la fonction vectorielle de* LEIBNIZ *associée au système $\{(\mathrm{A},2),(\mathrm{B},2)\}$. Pour tout point M de $\mathscr{W}$ :*

$$\vec{f}(\mathrm{M}) = 2\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MI}} + 2\overrightarrow{\mathrm{IA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{MI}} + 2\overrightarrow{\mathrm{IB}} = 4\overrightarrow{\mathrm{MI}} \tag{VI.1}$$

*En particulier : $\vec{f}(\mathrm{I}) = \vec{0}$ ; $\vec{f}(\mathrm{A}) = 4\overrightarrow{\mathrm{AI}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\vec{f}(\mathrm{A}) = 4\overrightarrow{\mathrm{BI}} = -2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.*

**THÉORÈME VI.1.1**

Soit $\{(\mathrm{A}_i,\alpha_i) \mid i \in [\![1,n]\!]\}$ un système de points pondérésde masse $m$ $\left(m = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)$ et $\vec{f}$ la fonction vectorielle de Leibniz qui lui est associée.

**(1)** Si $m \neq 0$, il existe un unique point G de $\mathscr{W}$ vérifiant : $\vec{f}(\mathrm{G}) = \vec{0}$.
Pour tout point M de $\mathscr{W}$ : $\vec{f}(\mathrm{M}) = m\overrightarrow{\mathrm{MG}}$.

**(2)** Si $m = 0$, alors $\vec{f}$ est une fonction vectorielle constante.

**Démonstration** Pour tous points M et N de $\mathscr{W}$, on a :
$\vec{f}(\mathrm{M}) - \vec{f}(\mathrm{N}) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{\mathrm{MA}_i} - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{\mathrm{NA}_i} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}_i} - \overrightarrow{\mathrm{NA}_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i\overrightarrow{\mathrm{NM}}\right) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i)\overrightarrow{\mathrm{NM}} = m\overrightarrow{\mathrm{NM}}$ ;
donc :

$$\vec{f}(\mathrm{M}) = \vec{f}(\mathrm{N}) + m\overrightarrow{\mathrm{MN}} \tag{VI.2}$$

Soit A un point fixé. En prenant : N = A, il vient pour tout point M de $\mathscr{W}$ :

$$\vec{f}(\mathrm{M}) = \vec{f}(\mathrm{A}) + m\overrightarrow{\mathrm{MA}} \tag{VI.3}$$

**Si $m \neq 0$**

**EXISTENCE DE G** Introduisons le point G tel que : $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{1}{m}\vec{f}(\mathrm{A})$.
En utilisant (VI.3) avec : M = G, il vient :

$$\vec{f}(\mathrm{G}) = \vec{f}(\mathrm{A}) + m\overrightarrow{\mathrm{GA}} = \vec{f}(\mathrm{A}) - \vec{f}(\mathrm{A}) = \vec{0}.$$

**DÉMONSTRATION DE LA FORMULE** Pour tous points M de $\mathscr{W}$, en utilisant (VI.2) avec : N = G, il vient :

$$\vec{f}(\mathrm{M}) = \vec{f}(\mathrm{G}) + m\overrightarrow{\mathrm{MG}} = \vec{0} + m\overrightarrow{\mathrm{MG}} = m\overrightarrow{\mathrm{MG}}.$$

**Unicité de G** D'après la formule précédente, puisque $m \neq 0$, pour tout point M du plan :

$$\vec{f}(\mathrm{M}) = \vec{0} \iff m\overrightarrow{\mathrm{MG}} = \vec{0} \iff \overrightarrow{\mathrm{MG}} = \vec{0} \iff \mathrm{M} = \mathrm{G}.$$

**Si $m = 0$**
Pour tous points M de $\mathscr{W}$, d'après (VI.3) :

$$\vec{f}(\mathrm{M}) = \vec{f}(\mathrm{A}) + 0 \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \vec{f}(\mathrm{A}).$$

Donc $\vec{f}$ est une fonction vectorielle constante. □

Le théorème VI.1.1 justifie la définition suivante.

**Définition VI.1.3**
Soit $\left\{(\mathrm{A}_i, \alpha_i) \mid i \in [\![1, n]\!]\right\}$ un système de points pondérésde masse non nulle.
L'unique point, G, vérifiant :

$$\alpha_1\overrightarrow{\mathrm{GA}_1} + \alpha_2\overrightarrow{\mathrm{GA}_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{\mathrm{GA}_n};$$

est appelé *barycentre* du système.

***Notations et vocabulaire*** *On peut alors écrire :*

$$\mathrm{G} = \mathrm{bar}\left\{(\mathrm{A}_1, \alpha_1), \cdots, (\mathrm{A}_n, \alpha_n)\right\}$$

*Si de plus tous les coefficients sont égaux, ont dit que G est l'*isobarycentre *des points $\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n$.*

***Remarques***
***1.*** *Un système dont la somme des coefficients est nulle n'a pas de barycentre.*
***2.*** *Lorsqu'on évoquera le barycentre d'un système, si cela n'est pas explicitement précisé, il sera sous-entendu que la masse, $m$, du système est non nulle.*
***3.*** *Si $m \neq 0$, le système $\left\{(\mathrm{A}_i, \alpha_i) \mid i \in [\![1, n]\!]\right\}$ est équivalent à $\{(\mathrm{G}, m)\}$.*
*On en déduit que deux systèmes de masses non nulles sont équivalents si et seulement si ils ont le même barycentre et la même masse.*
***4.*** *Deux systèmes de masses nulles ne sont pas nécessairement équivalents.*

***Exemple***
*Considérons le système composé de deux boules homogènes de même masse, $m$, reliées par une tige rigide et sans masse de longueur $\ell$. Ce système est équivalent à une masse ponctuelle de masse $2m$ placé au centre, I, de la tige.*

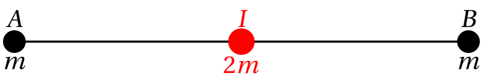



Fig. *VI.1 –*

***Exercice VI.1.5.*** ***A, B, C, D sont des points fixés de $\mathscr{W}$ et M est un point variable. Simplifier les écritures.***

***a.*** $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}$.
***b.*** $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{MC}}$.
***c.*** $3\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 5\overrightarrow{\mathrm{MB}} - 4\overrightarrow{\mathrm{MC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{MD}}$.
***d.*** $3\overrightarrow{\mathrm{MA}} - 5\overrightarrow{\mathrm{MB}} - 4\overrightarrow{\mathrm{MC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{MD}}$.

***Solution***

***a.*** *Introduisons l'isobarycentre, G, des points A, B et C. Il vient par réduction, pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{W}$ :*
$\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} = 3\overrightarrow{\mathrm{MG}}$.

***b.*** *On reconnaît une fonction vectorielle de Leibniz associée à un système de masse nulle. Cette fonction est donc constante, (en calculcultant l'image de C) pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{W}$ :*
$\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{MC}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}$.
*En calculant l'image de A on aurait obtenu, tout $\mathrm{M} \in \mathscr{W}$ : $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{MC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.*

***c.*** *On reconnaît la fonction vectorielle de Leibniz associée au système $\left\{(\mathrm{A}, 3), (\mathrm{B}, 5), (\mathrm{C}, -4), (\mathrm{D}, 6), \right\}$ de masse 10. On a : $10 \neq 0$ ; ce système a donc un barycentre que nous appellerons $\mathrm{G}_1$ ; il vient par réduction, pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{W}$ :*
$3\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 5\overrightarrow{\mathrm{MB}} - 4\overrightarrow{\mathrm{MC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{MD}} = 10\overrightarrow{\mathrm{MG}_1}$.

***d.*** *De même qu'en* ***b.****, pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{W}$ :*
$3\overrightarrow{\mathrm{MA}} - 5\overrightarrow{\mathrm{MB}} - 4\overrightarrow{\mathrm{MC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{MD}} = -5\overrightarrow{\mathrm{AB}} - 4\overrightarrow{\mathrm{AC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 3\overrightarrow{\mathrm{BA}} - 4\overrightarrow{\mathrm{BC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{BD}}$. □

***Remarque*** *Les systèmes associés aux questions* ***b.*** *et* ***d.*** *ont une masse nulle, on ne peut donc pas introduire de barycentre.*

### VI.1.4 Propriétés

**THÉORÈME VI.1.2 HOMOGÉNÉITÉ**

On ne change pas le barycentre d'un système en multipliant tous ces coefficients par une même constante non nulle.

**Démonstration** Soit G le barycentre d'un système $\{(A_i, \alpha_i) \mid i \in [\![1,n]\!]\}$ de masse non nulle et $\lambda$ un réel non nul.
On a : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ ; donc : $\sum_{i=1}^{n} \left(\lambda\alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \lambda\vec{0} = \vec{0}$. □

**THÉORÈME VI.1.3**

Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires et $a$, $b$, $c$, $d$ quatre nombres réels tels que :
$a+b \neq 0$ ; $a+b+c \neq 0$ ; $a+b+c+d \neq 0$.

**(1)** Le barycentre du système $\{(A,a),(B,b)\}$ est le point d'abscisse $\frac{b}{a+b}$ sur la droite (AB) munie du repère $(A,B)$.

**(2)** Le barycentre du système $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ est le point de coordonnées $\left(\frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{a+b+c}\right)$ sur le plan (ABC) muni du repère $(A,B,C)$.

**(3)** Le barycentre du système $\{(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)\}$ est le point de coordonnées $\left(\frac{b}{a+b+c+d}; \frac{c}{a+b+c+d}; \frac{d}{a+b+c+d}\right)$ dans $\mathscr{E}$ muni du repère $(A,B,C,D)$.

**Démonstration** Les trois propriétés se démontrent suivant le même schéma. À titre indicatif nous démontrerons la propriété **(2)**.
Soit G le barycentre du système. Pour tout point M de $\mathscr{W}$, on a par réduction de somme de Leibniz :

$$(a+b+c)\overrightarrow{MG} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}.$$

Pour M = A, on en déduit que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}.$$

D'où l'on tire le résultat désiré. □

***Exercice VI.1.6.*** ***A et B sont deux points tels que* AB = 3. *Placer le barycentre G du système* $\{(A,-2),(B,5)\}$.**

***Solution*** *G est le point d'abscisse* $\frac{5}{3}$ *sur la droite* (AB) *munie du repère* $(A,B)$.


□

***Exercice VI.1.7.*** ***Le plan est muni du repère*** $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. ***On considère les points*** $A(1;-1)$, ***B(5 ;-1) et*** $C(2;2)$.
***Placer le point, G, barycentre du système*** $\{(A,-5),(B,9),(C,8)\}$

***Solution*** *La masse du système est* 12*, donc par homogénéité :* $G = \operatorname{bar}\left\{\left(A;-\frac{5}{12}\right),\left(B;\frac{3}{4}\right),\left(C;\frac{2}{3}\right)\right\}$. *Nous en déduisons que G est le point de coordonnées* $\left(\frac{3}{4};\frac{2}{3}\right)$ *dans le repère* $(A,B,C)$. □

**THÉORÈME VI.1.4**

Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires et $x$, $y$, $z$ trois nombres réels.

**(1)** Sur la droite (AB) munie du repère $(A,B)$, le point d'abscisse $x$ est le barycentre du système $\{(A,1-x),(B,x)\}$.

**(2)** Dans le plan (ABC) muni du repère $(A,B,C)$ le point de coordonnées $(x;y)$ est le barycentre du système $\{(A,1-x-y),(B,x),(C,y)\}$.

**(3)** Dans $\mathscr{E}$ muni du repère $(A,B,C,D)$le point de coordonnées $(x;y;z)$ est le barycentre du système $\{(A,1-x-y-z),(B,x),(C,y)(D,z)\}$.

**Démonstration** Les trois propriétés se démontrent suivant le même schéma. À titre indicatif nous démontrerons la propriété **(2)**.
Soit M$(x;y)$ dans le repère (A,B,C). On a :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AM} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{MC}.$$

On en déduit que :

$$(1-x-y)\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

D'où l'on tire le résultat désiré. □

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate des théorèmes VI.1.3 et VI.1.4.

**COROLLAIRE VI.1.5**

Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires

**(1)** L'ensemble des barycentres des points A et B est la droite (AB).

**(2)** L'ensemble des barycentres des points A, B et C est le plan (ABC).

**(3)** L'ensemble des barycentres des points A, B, C et D est l'espace $\mathscr{E}$.

**Démonstration** Démontrons par exemple **(2)**.

D'après le théorème VI.1.3 tout barycentre de A, B, C est un point de (ABC).
D'après le théorème VI.1.4 tout point de (ABC) est un barycentre de A, B, C.
Donc, l'ensemble des barycentres des points A, B et C est le plan (ABC). □

**THÉORÈME VI.1.6** **ASSOCIATIVITÉ**

Dans un système de points pondérés, lorsqu'on remplace un sous-système par un sous-système équivalent, on obtient un système équivalent.

**Démonstration** Soit un système $\left\{(\mathrm{A}_i,\alpha_i) \mid i \in [\![1,n]\!]\right\}$, $\vec{f}$ la fonction vectorielle de LEIBNIZ associée et $\left\{(\mathrm{B}_j,\beta_j) \mid j \in [\![1,p]\!]\right\}$ un système équivalent au système $\left\{(\mathrm{A}_i,\alpha_i) \mid i \in [\![1,q]\!]\right\}$ (avec $0<q<n$).
Nous devons démontrer que les systèmes $\left\{(\mathrm{A}_1,\alpha_1),\cdots,(\mathrm{A}_q,\alpha_q),(\mathrm{A}_{q+1},\alpha_{q+1}),\cdots,(\mathrm{A}_n,\alpha_n)\right\}$ et $\left\{(\mathrm{B}_1,\beta_1),\cdots,(\mathrm{B}_p,\beta_p),(\mathrm{A}_{q+1},\alpha_{q+1}),\cdots,(\mathrm{A}_n,\alpha_n)\right\}$ ont la même fonction vectorielle de LEIBNIZ.
Pour tout point M de $\mathscr{W}$, on a : $\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\overrightarrow{\mathrm{MA}_i} = \sum_{j=1}^{p}\beta_j\overrightarrow{\mathrm{MB}_j}$.
Donc, pour tout point M de $\mathscr{W}$: $\vec{f}(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{\mathrm{MA}_i} = \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\overrightarrow{\mathrm{MA}_i} + \sum_{i=q+1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{\mathrm{MA}_i} = \sum_{j=1}^{p}\beta_j\overrightarrow{\mathrm{MB}_j} + \sum_{i=q+1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{\mathrm{MA}_i}$ □

***Remarque*** *Le théorème VI.1.6 signifie, entre autre, qu'on ne change pas le barycentre d'un système en remplaçant un sous-système par un sous-système équivalent.*

***Exercice VI.1.8.*** ***Soit ABC un triangle et $a$, $b$, $c$ trois réels tels que : $a+b\neq 0$ ; $b+c\neq 0$ ; $c+a\neq 0$ et $a+b+c\neq 0$. On considère les points $\mathrm{A}'$, $\mathrm{B}'$ et $\mathrm{C}'$, barycentres respectifs des systèmes : $\{(\mathrm{B},b),(\mathrm{C},c)\}$ ; $\{(\mathrm{C},c),(\mathrm{A},a)\}$ ; $\{(\mathrm{A},a),(\mathrm{B},b)\}$.***
***1. Justifier l'existence des points $\mathrm{A}'$, $\mathrm{B}'$ et $\mathrm{C}'$.***
***2. Démontrer que les droites $(\mathrm{AA}')$, $(\mathrm{BB}')$ et $(\mathrm{CC}')$ sont concourantes en un point qu'il conviendra de préciser.***

***Solution*** ***1.*** *Les systèmes : $\{(\mathrm{B},b),(\mathrm{C},c)\}$ ; $\{(\mathrm{C},c),(\mathrm{A},a)\}$ ; $\{(\mathrm{A},a),(\mathrm{B},b)\}$ ; sont chacun de masse non nulle, donc leurs barycentres existent.*
***2.*** *Posons :* $\mathrm{G} = \mathrm{bar}\left\{(\mathrm{A},a)(\mathrm{B},b),(\mathrm{C},c)\right\}$.
*Par associativité, on a :* $\mathrm{G} = \mathrm{bar}\left\{(\mathrm{A},a)(\mathrm{A}',b+c)\right\} = \mathrm{bar}\left\{(\mathrm{B},b),(\mathrm{B}',a+c)\right\} = \mathrm{bar}\left\{(\mathrm{C},c),(\mathrm{C}',a+b)\right\}$.
*Donc G appartient à la fois aux trois droites :*
*G est le point de concours des droites* $(\mathrm{AA}')$, $(\mathrm{BB}')$ *et* $(\mathrm{CC}')$. □

**THÉORÈME VI.1.7**

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Pour $i\in]\!]1;n[\![$ on considère des points $\mathrm{A}_i(x_i\,;y_i\,;z_i)$ et G le barycentre du système $\left\{(\mathrm{A}_i,\alpha_i) \,\middle|\, i\in[\![1,n]\!]\right\}$ de masse $m$ non nulle.

Les coordonnées de G sont : $\begin{cases} x_\mathrm{G} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \\ y_\mathrm{G} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i \\ z_\mathrm{G} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_i \end{cases}$

**Démonstration** Pour tout point M de $\mathscr{E}$, on a :

$$m\overrightarrow{\mathrm{MG}} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{\mathrm{MA}_i}.$$

Pour M = O, on en déduit que :

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}.$$

D'où l'on tire le résultat désiré. □

***Remarque*** *Dans le plan on a de même :* $\begin{cases} x_\mathrm{G} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \\ y_\mathrm{G} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i \end{cases}$

**DÉFINITION VI.1.4**

Soit $f$ une application de $\mathscr{W}$ dans lui-même.
On dira que $f$ conserve les barycentres si pour tout système $\left\{(\mathrm{A}_i,\alpha_i) \,\middle|\, i\in[\![1,n]\!]\right\}$ de masse non nulle $m$ et de barycentre G, le système $\left\{(f(\mathrm{A}_i),\alpha_i) \,\middle|\, i\in[\![1,n]\!]\right\}$ a pour barycentre $f(\mathrm{G})$.

Les isométries ont été vues en classe de Seconde, les homthéties seront vues à la fin de l'année scolaire et les similitudes seront vues en enseignement de spécialité en classe de Terminale. Nous admettons le théorème suivant.

**THÉORÈME VI.1.8**

**(1)** Les isométries (translations, rotations, réflexions …), les homothéties et plus généralement les similitudes conservent le barycentre.
**(2)** Les projections conservent le barycentre.

### VI.1.5 Exercices

**VI.1.a.** ABC est un triangle. Démontrer que l'isobarycentre des points A, B, C est le point de concours des médianes du triangle ABC.

# Chapitre VII

# Suites numériques

## VII.1 Vocabulaire de l'ordre dans $\mathbb{R}$

### VII.1.1 Majorants, minorants ...

Considérons une partie E de $\mathbb{R}$, par exemple : $E = ]-3;0] \cup \{2\}$ ;
On a pour tout $x \in E$ : $2,5 \geqslant x$ ; on dit que $2,5$ est *majorant* de E. Tout nombre plus grand que $2,5$ est également un majorant de E. L'ensemble des majorants de E est l'intervalle $[2;+\infty[$.

On a pour tout $x \in E$ : $-4 \leqslant x$ ; on dit que $-4$ est *minorant* de E. Tout nombre plus petit que $-4$ est également un minorant de E. L'ensemble des minorants de E est l'intervalle $]-\infty;-3]$.

E a un *plus grand élément*, 2, mais n'a pas de *plus petit élément*.

Un ensemble qui a des majorants (respectivement des minorants) est dit *majoré* (respectivement *minoré*). Un ensemble à la fois minoré et majoré est dit *borné*. Certaines parties de $\mathbb{R}$, comme $\mathbb{N}$, ne sont pas bornées.

Le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants (respectivement minorants) est appelé *borne supérieure* (respectivement *borne inférieure*). Par exemple la borne supérieure de E est 2 et sa borne inférieure est $-3$.

**THÉORÈME VII.1.1**

Une partie E de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe un nombre réel A tel que pour tout élément $x$ de A : $|x| \leqslant A$

**Démonstration** Pour tous nombres réels $x$ et A :

$$|x| \leqslant A \iff -A \leqslant x \leqslant A.$$

Soit E une partie de $\mathbb{R}$.

S'il existe un nombre réel A tel que pour tout élément $x$ de E : $|x| \leqslant A$ ; alors $-A$ est minorant de E et A est un majorant de E ; on en déduit que E est borné.

Réciproquement, si E est borné. Soit $m$ un minorant de E et M un majorant de E. Posons : $A = \max\{-m, M\}$.

On a : $-m \leqslant A$ et $M \leqslant A$ ; donc : $-A \leqslant m$ et $M \leqslant A$ ; or pour tout élément $x$ de E : $m \leqslant x \leqslant M$ ; donc par transitivité : $-A \leqslant x \leqslant A$.

Soit finalement, pour tout élément $x$ de E : $|x| \leqslant A$. □

### VII.1.2 Théorème de la borne supérieure (complément)

Ce paragraphe est hors programme, il peut ne pas être lu et est destiné aux élèves désireux d'en savoir plus.
Soit maintenant une partie majorée non vide E quelconque. Les considérations envisagées ci-dessus laissent supposer que l'ensemble des majorants de E est un intervalle qui serait donc de la forme $[a;+\infty[$ ou $]a;+\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$). Mais si $a$ n'était pas un majorant de E, alors il existerait un élément $x$ de E tel que : $a < x$.
On se trouverait alors dans la situation contradictoire suivante :
$\frac{a+x}{2}$ est un majorant de E (car $\frac{a+x}{2} \in ]a;+\infty[$) et $\frac{a+x}{2}$ n'est pas un majorant de E (car $\frac{a+x}{2} < x$).
On en déduit que $a$ est le plus petit des majorants de E et donc la borne supérieure de E.

Cette étude nous conduit à énoncer le théorème suivant que nous admettons.

**THÉORÈME VII.1.2 THÉORÈME DE LA BORNE SUPÉRIEURE**

Toute partie majorée (respectivement minorée) non vide de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure (respectivement inférieure).

***Remarque*** *Ce théorème est faux dans* $\mathbb{Q}$.

***Exemple*** *Dans* $\mathbb{Q}$ *l'ensemble*

$$E = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$$

*est majoré par* $\frac{3}{2}$ *mais n'a pas de borne supérieure ; alors que dans* $\mathbb{R}$ *il a une borne supérieure :* $\sqrt{2}$.

# VII.2 Définitions

## VII.2.1 Introduction

**DÉFINITION VII.2.1 SUITE NUMÉRIQUE**

Une *suite numérique* est une fonction d'une partie de $\mathbb{N}$ dans un ensemble de nombres (généralement $\mathbb{R}$).

***Exemples***

***1.*** *On peut considérer la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $u_n = n^2$.
*On a alors :* $u_0 = 0$ ; $u_1 = 1$ ; $u_2 = 4$ ; $u_3 = 9$ ; $u_4 = 16\dots$
*Pour chaque terme* $u_n$ *on a :* $u_n = f(n)$ *; où* $f$ *est la fonction* $x \mapsto x^2$.
*On dit que la suite* $(u_n)$ ***est définie explicitement****.*
*On peut calculer directement des termes de « grands indices » (*$u_{100} = 10\,000$*).*

***2.*** *On peut considérer la suite* $(v_n)_{n\geqslant 2}$ *définie par :* $\begin{cases} v_2 = \dfrac{1}{2} \\ v_{n+1} = v_n^2 \end{cases}$.

*On a alors :* $v_2 = \dfrac{1}{2}$ ; $v_3 = \dfrac{1}{4}$ ; $v_4 = \dfrac{1}{16}\cdots$
$v_0$ *et* $v_1$ *ne sont pas définis.*
*Pour chaque terme on a :* $v_{n+1} = f(v_n)$ *; où* $f$ *est la fonction* $x \mapsto x^2$.
*On dit que la suite* $(v_n)$ ***est définie par récurrence****.*
*Pour calculer un terme il faut connaître les termes précédents.*
*La suite* $(v_n)$ *peut cependant être définie explicitement, pour tout entier naturel* $n \geqslant 2$ *:* $v_n = \dfrac{1}{2^{(2^{n-2})}}$.

***3.*** *On peut également considérer la suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} w_0 = w_1 = 1 \\ w_{n+1} = w_{n+1} + w_n - n \end{cases}$.
*Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.*

***Remarque*** *Toutes les suites étudiées en classe de Première et de Terminale seront définies sur* $\mathbb{N}$ *ou à partir d'un certain indice.*

## VII.2.2 Composée d'une suite par une fonction

**DÉFINITION VII.2.2**

Soit $f$ une fonction et $(v_n)$ une d'éléments de l'ensemble de définition de $f$.
La composée de $(v_n)$ par $f$ est la suite $(u_n)$ de terme général : $u_n = f(v_n)$.

***Exemple*** *Si* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $f$ *sont définies par :* $v_n = n^2$ *et* $f(x) = 2x - 3$ *; alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est définies par :* $u_n = 2n^2 - 3$.

# VII.3 Représentation graphique d'une suite

## VII.3.1 Représentation graphique d'une suite définie explicitement

Pour représenter graphiquement une suite définie explicitement (par une relation du type $u_n = f(n)$), il suffit de représenter graphiquement la fonction $f$ sur la partie positive de son ensemble de définition.

***Exemple*** *Pour représenter graphiquement la suite* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *définie par :* $u_n = 2 - \dfrac{2}{n}$ *; il suffit de tracer la représentation graphique de la fonction* $f : x \mapsto 2 - \dfrac{2}{x}$ *; pour chaque indice* $n$*,* $u_n$ *est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse* $n$*.*

Les termes de la suite apparaissent alors sur l'axe des ordonnées (voir figure VII.1).

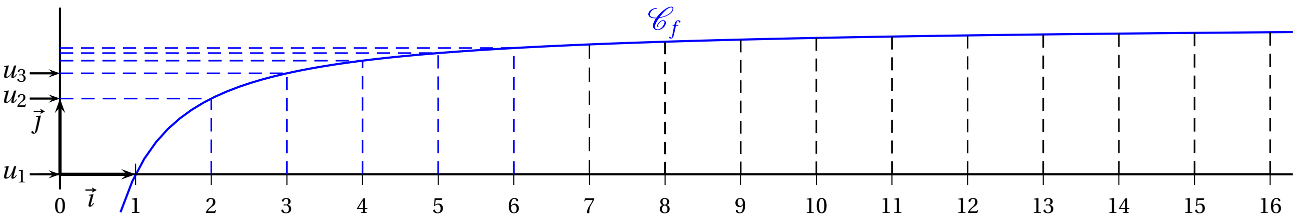



FIG. VII.1 – Représentation graphique d'une suite définie explicitement.

### VII.3.2 Représentation graphique d'une suite définie par récurrence

Pour représenter graphiquement une suite définie par récurrence (par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$), on représente graphiquement la fonction $f$ sur un intervalle contenant tous les termes de la suite et on trace la première bissectrice[1]. On place le premier terme puis les autres de proche en proche par la méthode suivante.

**Méthode pour placer $u_{n+1}$ sur l'axe des abscisses lorsque $u_n$ est placé**

- On place sur la courbe le point $\mathrm{A}_n$ d'abscisse $u_n$. Ce point a donc pour ordonnées $f(u_n)$, c'est-à-dire $u_{n+1}$.
- On place sur la première bissectrice le point $\mathrm{B}_n$ de même ordonnée que $\mathrm{A}_n$. $\mathrm{B}_n$ est le point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = u_{n+1}$, $\mathrm{B}_n$ a donc pour abscisse $u_{n+1}$.
- Il ne reste plus qu'à placer $u_{n+1}$ sur l'axe des abscisses.

***Exemple*** *Pour représenter graphiquement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :* $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{2}{u_n} \end{cases}$ ;

*on trace sur $[0; +\infty]$ la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$ et la droite $\Delta$ d'équation : $y = x$.*

Les termes de la suite apparaissent alors sur l'axe des abscisses (voir figure VII.2).

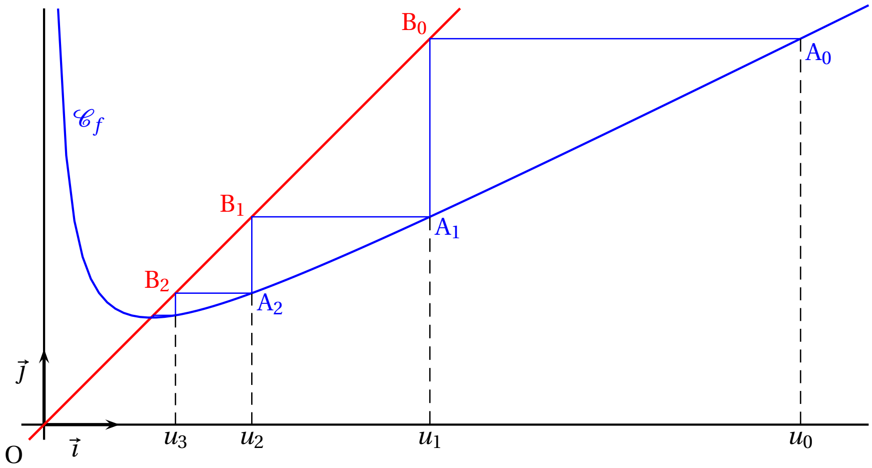



FIG. VII.2 – Représentation graphique d'une suite définie par récurrence.

## VII.4 Suites bornées

**DÉFINITIONS VII.4.1 SUITE BORNÉE**

**(1)** Dire qu'une suite est *majorée* (respectivement *minorée*) signifie que l'ensemble des termes de cette suite est majoré (respectivement minoré).
**(2)** Une suite à la fois majorée et minoré est dite *bornée*.

***Exemple*** *Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 2\sin n + 1$.*
*Soit $n$ un entier naturel. La fonction $f : x \mapsto 2x+1$ est croissante sur $\mathbb{R}$ (fonction affine de coefficient dominant positif) et on sait que : $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$ ; donc : $f(-1) \leqslant f(\sin n) \leqslant f(1)$ ; c'est-à-dire : $-1 \leqslant u_n \leqslant 3$. La suite $(u_n)$ est donc majorée par 3 et minorée par 1*

[1] la première bissectrice est la droite d'équation $y = x$

Lorsqu'une suite $(u_n)$ est majorée, par abus de langage nous appellerons borne supérieure de $(u_n)$ la borne supérieure de l'ensemble de ces termes.

# VII.5 Suites monotones

## VII.5.1 Définitions

**DÉFINITIONS VII.5.1 SUITE MONOTONE**

**(1)** Dire qu'une suite est croissante (respectivement décroissante) signifie que cette suite est une fonction croissante (respectivement décroissante).
**(2)** Les suites croissantes et les suites décroissantes sont dites monotones.

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite. Dire que $(u_n)$ est croissante signifie que pour tous entiers $p$ et $q$ supérieurs ou égaux à $n_0$ :

$$p \leqslant q \qquad \Longrightarrow \qquad u_p \leqslant u_q.$$

***Remarques***
***1.*** *On définit de même les suites* strictement *monotones.*
***2.*** *Toute suite croissante est minorée par son premier terme*
***3.*** *Toute suite décroissante est majorée par son premier terme*

**DÉFINITIONS VII.5.2**

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite.
**(1)** La suite $(u_n)$ est dite constante lorsque pour tout nombre entier, $n$, supérieur ou égal à $n_0$ : $u_n = u_{n_0}$.
**(2)** La suite $(u_n)$ est dite stationnaire lorsqu'il existe un nombre entier, $p$, tel que pour tout nombre entier, $n$, supérieur ou égal à $p$ : $u_n = u_p$.

***Remarques***
***1.*** *Les suites constantes sont les suites à la fois croissantes et décroissantes.*
***2.*** *Les suites stationnaires sont les suites constantes à partir d'un certain indice.*
***3.*** *Les suites constantes sont des cas particuliers de suites stationnaires.*

## VII.5.2 Méthodes d'étude du sens de variation d'une suite

### VII.5.2.a Cas général

**THÉORÈME VII.5.1**
Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite numérique.
**(1)** Si pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ; alors la suite $(u_n)$ est croissante.
**(2)** Si pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ ; alors la suite $(u_n)$ est décroissante.

**Démonstration** Démontrons **(1)**. Soit $p$ et $q$ deux entiers tels que : $n_o \leqslant p \leqslant q$. On a :

$$u_p \leqslant u_{p+1} \leqslant \cdots \leqslant u_{q-1} \leqslant u_q$$

donc la suite $(u_n)$ est croissante. On démontre de même **(2)**. □

***Exercice VII.5.1.*** ***Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \frac{1}{n}$.***

***Solution*** *Soit $n$ un entier naturel non nul. On a :*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)}$$

*or $n$ et $n+1$ sont tous deux strictement positifs donc pour tout entier naturel non nul $n$ on a : $-\frac{1}{n(n+1)} < 0$ ;*
*c'est-à-dire : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.*
*La suite $(u_n)$ est donc décroissante.* □

### VII.5.2.b Lorsque tous les termes de la suite sont strictement positifs

**THÉORÈME VII.5.2**
Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite dont tous les termes sont *strictement positifs*.

**(1)** Si pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ ; alors la suite $(u_n)$ est croissante.

**(2)** Si pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ ; alors la suite $(u_n)$ est décroissante.

**Démonstration** Ce théorème se déduit du précédent car les termes de la suite étant strictement positifs, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \implies u_{n+1} \geqslant u_n \qquad \text{et} \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 \implies u_{n+1} \leqslant u_n. \square$$

***Exercice VII.5.2.*** ***Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n}$.***

***Solution*** *Tous les termes de cette suite sont strictement positifs. Soit $n$ un entier naturel non nul.*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

*Donc : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$. La suite $(u_n)$ est décroissante.* □

### VII.5.2.c Lorsque la suite est définie explicitement, $u_n = f(n)$

**THÉORÈME VII.5.3**
Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite définie par une relation du type : $u_n = f(n)$.

**(1)** Si la fonction $f$ est croissante sur $[n_0 ; +\infty[$ ; alors la suite $(u_n)$ est croissante.

**(2)** Si la fonction $f$ est décroissante sur $[n_0 ; +\infty[$ ; alors la suite $(u_n)$ est décroissante.

**Démonstration** Ce théorème est une conséquence immédiate de la DÉFINITION VII.5.1□

***Exercice VII.5.3.*** ***Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n}$.***

***Solution*** *On sait que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $[1 ; +\infty[$ donc la suite $(u_n)$ est décroissante.* □

***Remarque*** *La réciproque de ce théorème est fausse, la suite $(u_n)$ peut être croissante sans que la fonction $f$ le soit. Pour s'en convaincre il suffit de considérer, par exemple, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)$.*
*La fonction $f$ n'est pas monotone car sa dérivée, la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2} + \cos(2\pi x)$, est strictement positive sur les intervalles $\left]k - \dfrac{5}{12} ; k + \dfrac{5}{12}\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$ et strictement négative sur les intervalles $\left]k + \dfrac{5}{12} ; k + \dfrac{7}{12}\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$ ; et pourtant la suite $(u_n)$, définie par $u_n = f(n) = \dfrac{n}{2}$, est strictement croissante (voir figure VII.3).*

### VII.5.2.d Composée d'une suite monotone par une fonction monotone

Le théorème suivant est un cas particulier du théorème I.1.3.

**THÉORÈME VII.5.4**

Si $u_n$ est une suite monotone d'éléments d'un intervalle I et si $f$ est une fonction monotone sur I, alors $f(u_n)$ est une suite monotone ; plus précisément, le sens de variation de $f(u_n)$ est donné dans le tableau ci-dessous.

| | $f$ est croissante sur I | $f$ est décroissante sur I |
|---|---|---|
| $(u_n)$ est croissante | $(f(u_n))$ est croissante | $(f(u_n))$ est décroissante |
| $(u_n)$ est décroissante | $(f(u_n))$ est décroissante | $(f(u_n))$ est croissante |

***Exemple*** *Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de terme général : $v_n = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$.*

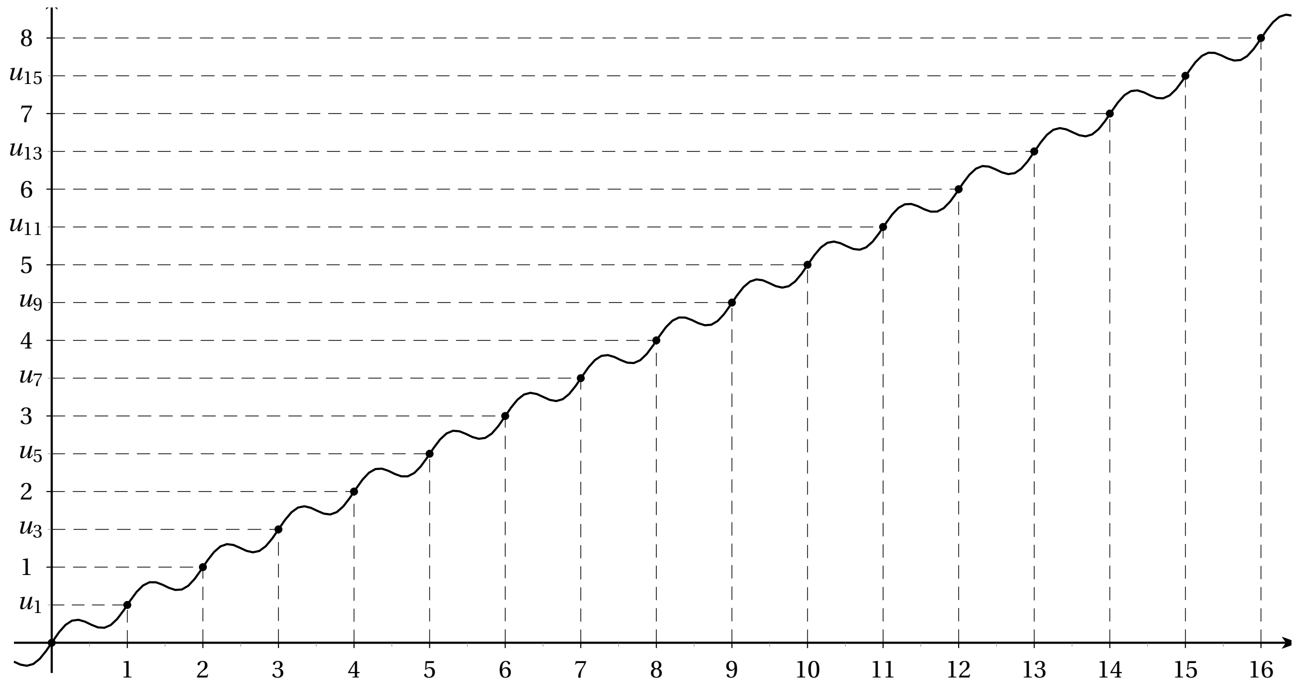



FIG. VII.3 – Suite croissante définie explicitement, sans que le fonction soit croissante.

*$(v_n)$ est la composée de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de terme général, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ par la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. $(u_n)$ est strictement positive (comme somme de nombres strictement positifs) et croissante ($\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n}$ avec $\frac{1}{n} > 0$) de plus la fonction $f$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ ; donc la suite $(v_n)$ est décroissante.*

# VII.6 Suites arithmétiques - suites géométriques

## VII.6.1 Suites arithmétiques

### VII.6.1.a Définition

**DÉFINITION VII.6.1**

Une suite *arithmétique* de *raison* $r$ est une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ telle que pour tout entier $n \geqslant n_o$ : $u_{n+1} = u_n + r$.

***Remarque*** *Une suite arithmétique est entièrement déterminée par sa raison et son premier terme.*

***Exemple*** *Pour la suite arithmétique de raison $-2$ et de premier terme $u_3 = 5$, on a : $u_4 = 3$ ; $u_5 = 1$ ; $u_6 = -1$ ...*

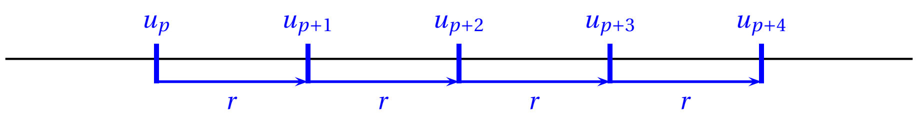



FIG. VII.4 – Suite arithmétique.

La figure VII.4 suggère que pour une suite arithmétique de raison $r$ : $u_{p+4} = u_p + 4r$.
En posant : $n = p + 4$ ; il vient : $4 = n - p$ et $u_n = u_p + (n-p)r$.
Plus généralement, on a le théorème suivant.

**THÉORÈME VII.6.1**

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite arithmétique de raison $r$.
Pour tous nombres entiers $n$ et $p$ supérieurs ou égaux à $n_0$ on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r.$$

**Démonstration** Procédons par disjonction des cas.

**1$^{er}$ cas $n = p$** On a : $u_p + (n-p)r = u_n + 0 \times r = u_n$ ; donc le théorème est vérifié.

**2$^e$ cas $n > p$** On a : $u_{p+1} = u_p + r$ ; $u_{p+2} = u_{p+1} + r$ ; $u_{p+3} = u_{p+2} + r$ ;…
plus généralement, à chaque étape on passe d'un terme au suivant en ajoutant $r$. On passe de $u_p$ à $u_n$ en $n-p$ étapes, c'est-à-dire en ajoutant $n-p$ fois $r$, d'où : $u_n = u_p + (n-p)r$.

**3$^e$ cas $n < p$** On a : $p > n$ ; donc, d'après le cas précédent (en permutant $n$ et $p$), il vient : $u_p = u_n + (p-n)r$ ; d'où : $u_n = u_p + (n-p)r$.

Dans les trois cas la formule est vérifiée. □

***Exemple*** *Si $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison $-5$ et si $u_{13} = 52$ alors : $u_{121} = u_{13} - 5(121-13) = -488$.*

Lorsque $p = n_0$, on en déduit le corollaire suivant.

**COROLLAIRE VII.6.2**

Si $(u_n)$ est la suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_{n_0}$, alors pour tout nombre entier $n$ (avec $n \geqslant n_0$), on a :

$$u_n = r(n-n_0) + u_{n_0}.$$

***Exemple*** *La suite arithmétique $(u_n)$ de raison 3 et de premier terme $u_2 = -1$ est définie par : $u_n = 3(n-2) - 1 = 3n - 7$.*

***Remarques***

***1.*** *L'expression obtenue dans le corollaire VII.6.2 fournit une définition explicite d'une suite arithmétique.*

***2.*** *le terme général d'une suite arithmétique est une fonction affine de l'indice dont le coefficient de degré 1 est la raison.*

### VII.6.1.b Propriétés

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la définition VII.6.1.

**THÉORÈME VII.6.3**

**(1)** Une suite arithmétique est croissante si, et seulement si, sa raison est positive.

**(2)** Une suite arithmétique est décroissante si, et seulement si, sa raison est négative.

**DÉFINITION VII.6.2**

La moyenne arithmétique de deux nombres réels $a$ et $b$ est le nombre : $\dfrac{a+b}{2}$.

**THÉORÈME VII.6.4**

Si $a$, $b$, $c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors $b$ est la moyenne arithmétique de $a$ et $c$.

**Démonstration** Soit $(u_n)$ la suite arithmétique, $r$ sa raison et $k$ l'indice de $b$.

On a : $\begin{cases} a = u_{k-1} \\ b = u_k = u_{k-1} + r = a + r \\ c = u_{k+1} = u_k + r = b + r \end{cases}$ ; donc : $\dfrac{a+c}{2} = \dfrac{b-r+b+r}{2} = b$. □

### VII.6.1.c Somme de termes consécutifs

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_o}$ une suite arithmétique et $m$ et $p$ deux entiers tels que : $n_0 \leqslant m \leqslant p$.

On se propose de calculer la somme : $\mathrm{S} = \underbrace{u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p}_{p-m+1 \text{ termes}} = \sum_{n=m}^{p} u_n$.

On a donc : $\begin{cases} \mathrm{S} = & u_m & + & (u_m + r) & + & \cdots & + & (u_m + (p-m)r) \\ \mathrm{S} = & (u_m + (p-m)r) & + & (u_m + (p-m-1)r) & + & \cdots & + & u_m \end{cases}$

puis par somme : $2\mathrm{S} = (u_m + u_m + (p-m)r) + (u_m + u_m + (p-m)r) + \cdots + (u_m + u_m + (p-m)r)$ ; d'où finalement :

$$u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p = (p-m+1)\frac{u_m + u_p}{2}.$$

**THÉORÈME VII.6.5**

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite arithmétique et $m$ et $p$ des nombres entiers naturels tels que : $n_0 \leqslant m \leqslant p$. On a :

$$\sum_{k=m}^{p} u_k = (p-m+1)\frac{u_m + u_p}{2}.$$

On peut retenir cette formule en remarquant qu'une somme de termes consécutifs d'une suite **arithmétique** s'obtient en effectuant le produit du nombre de termes par la moyenne des termes extrêmes.

**Exercice VII.6.1.** **Calculer la somme des $n$ premiers nombres entiers naturels non nuls.**

***Solution*** *Les $n$ premiers nombres entiers naturels non nuls sont les $n$ premiers de la suite arithmétique de raison 1 et de premier terme, $u_1 = 1$, donc :*

$$\sum_{k=1}^{n} k = n\frac{u_1 + u_n}{2} = n\frac{1+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

**Exercice VII.6.2.** **Calculer la somme des $n$ premiers nombres entiers naturels impairs.**

***Solution*** *Les $n$ premiers nombres entiers naturels impairs sont les nombres de la forme $2k-1$, pour $k$ variant de 1 à $n$ ; ce sont donc les $n$ premiers termes de la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme : $u_1 = 1$. On a : $u_n = 2n-1$.* □

## VII.6.2 Suites géométriques

### VII.6.2.a Définition

**DÉFINITION VII.6.3**

Une suite *géométrique* de *raison $q$* est une suite $(u_n)_{n\geqslant n_o}$ telle que pour tout entier $n \geqslant n_o$ : $u_{n+1} = q u_n$.

***Exemples*** *Considérons les suites géométriques $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$, définies sur $\mathbb{N}$, de raisons respectives $2$, $-3$, $\frac{1}{2}$ et de premiers termes respectifs $3$, $2$, $-4$. Les cinq premier termes de chaque suite sont représentés dans la tableau VII.1.*

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 3 | 6 | 12 | 24 | 48 |
| $v_n$ | 2 | $-6$ | 18 | $-54$ | 162 |
| $w_n$ | $-4$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ |

TAB. VII.1 – Cinq premiers termes de suites géométriques $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$.

***Remarques***

***1.*** *Lorsque $q = 0$, la suite est nulle à partir du deuxième terme, elle est donc stationnaire.*
***2.*** *Lorsque $q = 1$, la suite est constante.*
***3.*** *Une suite géométrique est entièrement déterminée par sa raison et son premier terme.*
***4.*** *Lorsque la raison est strictement négative et le premier terme non nul, la suite est de signe alterné, elle est donc non monotone (ni croissante ni décroissante).*
***5.*** *Lorsque la raison est strictement positive, la suite géométrique est du signe de son premier terme.*

**THÉORÈME VII.6.6**

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite géométrique de raison $q$.
Pour tous nombres entiers $n$ et $p$ supérieurs ou égaux à $n_0$ on a :

$$u_n = u_p q^{n-p}.$$

**Démonstration** Procédons par disjonction des cas.

**1^er^ cas $n = p$** On a : $u_p q^{n-p} = u_p q^0 = u_p = u_n$ ; donc le théorème est vérifié.

**2^e^ cas $n > p$** On a : $u_{p+1} = u_p q$ ; $u_{p+2} = u_{p+1} q$ ; $u_{p+3} = u_{p+2} q$ ;...
plus généralement, à chaque étape on passe d'un terme au suivant en multipliant par $q$. On passe de $u_p$ à $u_n$ en $n-p$ étapes, c'est-à-dire en multipliant $n-p$ fois par $q$, d'où : $u_n = u_p q^{n-p}$.

**3^e^ cas $n < p$** On a : $p > n$ ; donc, d'après le cas précédent (en permutant $n$ et $p$), il vient : $u_p = u_n q^{p-n}$ ; d'où : $u_n = u_p q^{n-p}$.

Dans les trois cas la formule est vérifiée. □

***Exemple*** *Si $(u_n)$ est une suite géométrique de raison 3 et si $u_4 = -\frac{1}{27}$, alors : $u_{12} = -\frac{1}{27} \times 3^8 = -243$.*

Lorsque $p = n_0$, on déduit du théorème VII.6.6 le corollaire suivant.

**COROLLAIRE VII.6.7**

Si $(u_n)$ est la suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_{n_0}$, alors pour tout nombre entier $n$ (avec $n \geqslant n_0$), on a :

$$u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}.$$

***Remarques***

***1.*** *L'expression obtenue dans le corollaire VII.6.7 fournit une définition explicite d'une suite géométrique.*
***2.*** *Lorsque $q \neq 0$, une suite géométrique admet une définition explicite de la forme : $u_n = k q^n$ avec $k = u_{n_0} q^{-n_0}$.*

***Exemples***

1. *La suite géométrique, $(u_n)$, de raison 3 et de premier terme $u_2 = -1$ est définie par : $u_n = -\dfrac{1}{9} \times 3^n$.*
2. *La suite géométrique, $(v_n)$, de raison $-\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_3 = 128$ est définie par : $u_n = -\dfrac{1024}{(-2)^n}$.*

### VII.6.2.b Propriétés

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la définition VII.6.3.

**THÉORÈME VII.6.8**

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite géométrique de raison $q$.
Le sens de variation de $(u_n)$ est donné dans le tableau ci-dessous.

| $(u_n)$ | $q \in ]1;+\infty[$ | $q \in ]0;1[$ | $q \in ]-\infty;0[$ | $q = 0$ | $q = 1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_{n_0} > 0$ | croissante | décroissante | non monotone | stationnaire | constante |
| $u_{n_0} < 0$ | décroissante | croissante | non monotone | stationnaire | constante |
| $u_{n_0} = 0$ | constante | | | | |

**DÉFINITION VII.6.4**

La moyenne géométrique de deux nombres réels strictement positifs $a$ et $b$ est le nombre : $\sqrt{ab}$.

**THÉORÈME VII.6.9**

Si $a$, $b$, $c$ sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique à termes strictement positifs, alors $b$ est la moyenne géométrique de $a$ et $c$.

**Démonstration** Soit $(u_n)$ la suite géométrique, $q$ sa raison et $k$ l'indice de $b$.

La suite est à termes strictement positifs donc : $q \neq 0$. On a : $\begin{cases} a = u_{k-1} \\ b = u_k = qu_{k-1} = qa \\ c = u_{k+1} = qu_k = qb \end{cases}$ ; donc : $\sqrt{ac} = \sqrt{\dfrac{b}{q} \times qb} = |b| = b$. □

**Représentation graphique d'une suite géométrique**

Pour représenter graphiquement une suite géométrique de raison $q$, on peut tracer les droites d'équations $y = x$ et $y = qx$ puis utiliser la méthode proposée §VII.3.2 page 89.

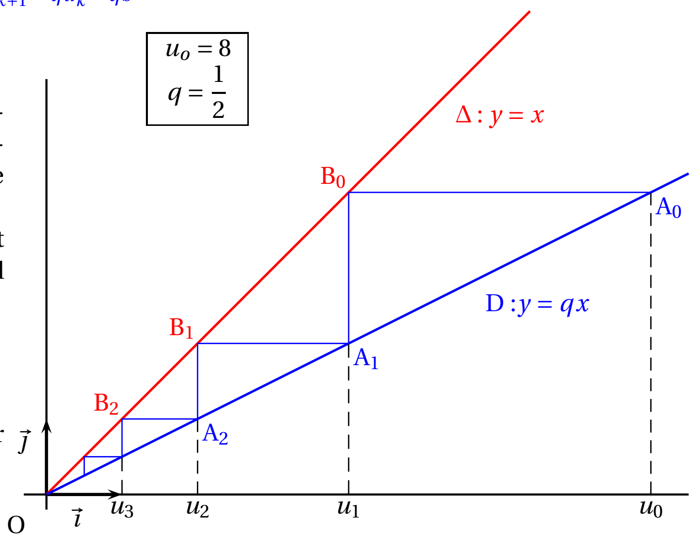
Désignons par h l'homothétie de centre O et de rapport $q$. Sur la figure ci-contre, on a pour tout entier naturel $n$ :

$\overrightarrow{OB_{n+1}} = u_{n+2}\vec{\imath} + u_{n+2}\vec{\jmath} = q(u_{n+1}\vec{\imath} + u_{n+1}\vec{\jmath})$

c'est-à-dire : $\overrightarrow{OB_{n+1}} = q\,\overrightarrow{OB_n}$.

Donc $B_{n+1}$ est l'image de $B_n$ par h.

On démontre de même que $A_{n+1}$ est l'image de $A_n$ par h.




### VII.6.2.c Somme de termes consécutifs

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_o}$ une suite géométrique de raison $q$ (avec $q \neq 1$) et $m$ et $p$ deux entiers tels que : $n_0 \leqslant m \leqslant p$.

On se propose de calculer la somme : $S = \underbrace{u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p}_{p-m+1 \text{ termes}} = \displaystyle\sum_{n=m}^{p} u_n$.

On a donc : $\begin{cases} S = & u_m & +qu_m & +q^2u_m & +\cdots & +u_m q^{p-m} & \\ qS = & & qu_m & +q^2u_m & +\cdots & +u_m q^{p-m} & +u_m q^{p-m+1} \end{cases}$

puis par différence : $qS - S = u_m q^{p-m+1} - u_m$ ; d'où finalement :

$$u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p = \frac{u_m - u_{p+1}}{1-q}$$

On peut retenir cette formule en remarquant qu'une somme de termes consécutifs d'une suite **géométrique** s'obtient en effectuant le quotient : $\dfrac{\text{premier terme} - \text{suivant du dernier}}{1 - \text{raison}}$.

***Remarque*** *En particulier on a, pour tout entier naturel non nul $n$ : $1+q+\cdots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.*

**Exercice VII.6.3.** ***Démontrer que pour tout $x\in[0;1[$ et tout $n\in\mathbb{N}^\star$ ; on a : $1+x+\cdots+x^n\leqslant\dfrac{1}{1-x}$***

***Solution*** *$1+x+\cdots+x^n$ est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $x$, donc :*

$$1+x+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

*Or $1-x$ est strictement positif et : $1-x^{n+1}\leqslant 1$ (car $x$ est positif) ; donc par quotient :*

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\leqslant\frac{1}{1-x};$$

*c'est-à-dire :*

$$1+x+\cdots+x^n\leqslant\frac{1}{1-x}.$$

□

**Corollaire VII.6.10**
Pour tous nombres réels $a$, $b$ et pour tout entier naturel non nul $n$, on a :

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

**Démonstration** Pour $a=0$, l'égalité devient : $-b^n=-b\times b^{n-1}$ ; qui est vraie.
Pour $a=b$, l'égalité devient : $0=0\times na^{n-1}$ ; qui est vraie.
Lorsque $a\neq 0$ et $a\neq b$, le second facteur du second membre de l'égalité est la somme des termes consécutifs d'un suite géométrique de raison $\frac{b}{a}$, on en déduit que :
$a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}=\dfrac{a^{n-1}-\frac{b^n}{a}}{1-\frac{b}{a}}=\dfrac{a^n-b^n}{b-a}$.
En multipliant les membres extrêmes par $b-a$, on en déduit l'identité désirée. □

***Remarques***

1. *Lorsque $n=2$, on retrouve l'identité **??** et lorsque $n=3$, on retrouve l'identité **??**.*
2. *Lorsque $n$ est impaire, en remplaçant $b$ par $-b$, on obtient :*

$$a^n+b^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1}\right)$$

*Lorsque $n=3$, on retrouve l'identité **??**.*

## VII.6.3 Exercices résolus

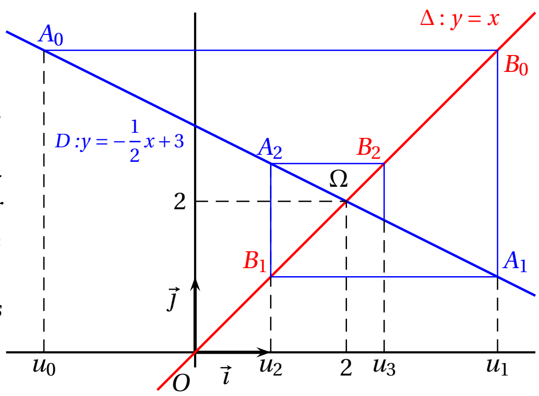
### VII.6.3.a Suite arithmético-géométrique

**Exercice VII.6.4.** ***On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}u_0=-2\\ u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+3\end{cases}$.***

***1. Déterminer un réel $a$ tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=u_n-a$ ; soit géométrique.***

***2. Exprimer explicitement le terme général de la suite $(v_n)$ ; en déduire celui de la suite $(u_n)$.***

***Solution*** *Pour se faire une idée, entreprenons une étude graphique.*




*On trace les droites $D$ et $\Delta$ d'équations respectives : $y=-\dfrac{1}{2}x+3$ et $y=x$.*
*Les coordonnées du point $\Omega(2;2)$ vérifient les équations de $D$ et $\Delta$, donc $\Omega$ est le point d'intersection de ces deux droites sécantes.*
*Il semble sur le graphique (on pourrait aisément le démontrer géométriquement) qu'une homothétie $h$, de centre $\Omega$, transforme (pour tout $n$) $A_n$ en $A_{n+1}$. Ce qui suggère une relation du type : $\overrightarrow{\Omega A}_{n+1}=k\overrightarrow{\Omega A}_n$.*
*Or les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}_{n+1}$ et $\overrightarrow{\Omega A}_n$ ont respectivement pour abscisses $u_{n+1}-2$ et $u_n-2$.*

*On aurait donc : $u_{n+1}-2=k(u_n-2)$.*

*Ces observations graphiques nous conduisent à examiner si pour $a = 2$, la suite $(v_n)$ est géométrique.*
*Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = -\frac{1}{2}u_n + 3 - 2 = -\frac{1}{2}u_n + 1 = -\frac{1}{2}(u_n - 2) = -\frac{1}{2}v_n$.*
*Donc, pour $a = 2$, la suite $(v_n)$ est la suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -4$.*
*Par conséquent la suite $(v_n)$ est définie par : $v_n = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.*
*De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = v_n + 2$ ;*
*donc la suite $(u_n)$ est définie par : $u_n = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2$.* □

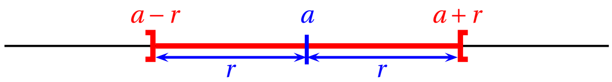
Pour deviner le comportement d'une suite, une étude graphique (lorsqu'elle est envisageable) est souvent fructueuse.

Pour démontrer qu'une suite $(v_n)$ est géométrique, on peut exprimer $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$ de façon à exhiber une relation du type : $v_{n+1} = qv_n$.

# VII.7 Limites de suites

Soit $a$ un réel et $r$ un réel strictement positif. On appelle intervalle ouvert de centre $a$ et de rayon $r$ l'intervalle ouvert $]a-r, a+r[$. Cet intervalle sera noté $\mathrm{I}_{a,r}$. $\mathrm{I}_{a,r}$ est l'ensemble des réels dont la distance à $a$ est strictement inférieure à $r$. Pour tout réel $x$ on a donc :

$$x \in \mathrm{I}_{a,r} \quad \Longleftrightarrow \quad |x-a| < r.$$




## VII.7.1 Limite finie, limite infinie

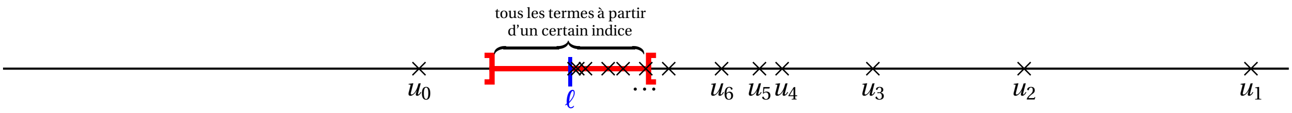
### VII.7.1.a Définitions

**DÉFINITION VII.7.1**
Dire qu'un réel $\ell$ est limite d'une suite $(u_n)$ signifie que *tout* intervalle ouvert de centre $\ell$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice. On écrit alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

***Exemple*** *Démontrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ; a pour limite 0.*
*Soit $]-r\,;r[$ (avec $r > 0$) un intervalle ouvert centré en 0.*
*Cherchons un entier N tel que pour tout naturel $n \geqslant \mathrm{N}$, on ait : $u_n \in ]-r\,;r[$ ; c'est-à-dire : $-r < u_n < r$.*
*Il suffit de prendre un entier N tel que : $\mathrm{N} > \frac{1}{r^2}$.*
*En effet, pour tout entier naturel $n \geqslant \mathrm{N}$, on a alors : $n \geqslant \mathrm{N} > \frac{1}{r^2}$ ; la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on en déduit que : $\sqrt{n} > \frac{1}{r}$ ; la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on en déduit que : $r < 0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < r$.*
*D'où : $u_n \in ]-r\,;r[$ ; dès que : $n \geqslant \mathrm{N}$.*
*Donc la suite $(u_n)$ a pour limite 0.*

La définition VII.7.1 signifie que les termes de la suite sont à une distance aussi petite qu'on le souhaite dès que les indices sont suffisamment grands. On a donc une accumulation des termes de la suite $(u_n)$ autour de $\ell$.




D'après la définition VII.7.1, pour démontrer qu'une suite $(u_n)$ a pour limite $\ell$, il suffit de démontrer que pour tout $r > 0$, il existe un entier N tel que si $n > \mathrm{N}$, alors $|u_n - \ell| < r$.

**DÉFINITIONS VII.7.2**

**(1)** Dire qu'une suite $(u_n)$ a pour limite $+\infty$ signifie que *tout* intervalle ouvert du type $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice. On écrit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

**(2)** Dire qu'une suite $(u_n)$ a pour limite $-\infty$ signifie que *tout* intervalle ouvert du type $]-\infty;A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice. On écrit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

***Exemple*** *Démontrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \sqrt{n}$ ; a pour limite $+\infty$.*
*Soit A un un nombre réel.*
*Cherchons un entier N tel que pour tout naturel $n \geqslant N$, on ait : $u_n \in ]A;\infty[$ ; c'est-à-dire : $A < u_n$.*
*Il suffit de prendre un entier N tel que : $N > A^2$.*
*En effet, pour tout entier naturel $n \geqslant N$, on a alors : $n \geqslant N > A^2$ ; la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que : $\sqrt{n} > |A|$ ; d'où par transitivité : $\sqrt{n} > A$. D'où : $u_n \in ]A;\infty[$ ; dès que : $n \geqslant N$.*
*Donc la suite $(u_n)$ a pour limite $+\infty$.*

***Remarques***

***1.*** *Une suite qui a une limite finie est dite **convergente**.*
***2.*** *Une suite qui n'a pas de limite ou dont la limite n'est pas finie est dite **divergente**.*
***3.*** *Dans les définitions de limites de suites, on peut remplacer l'expression « à partir d'un certain indice » par « sauf un nombre fini d'entre eux ».*
***4.*** *Tout intervalle ouvert contenant $\ell$ inclut un intervalle ouvert de centre $\ell$. Dans la définition VII.7.1 on pourrait donc remplacer « de centre $\ell$ » par « contenant $\ell$ ».*

**THÉORÈME VII.7.1**

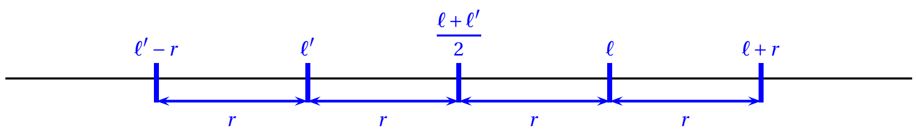
Toute suite convergente est bornée.

**Démonstration** Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite convergente et $\ell$ sa limite. $(u_n)$ converge ver $\ell$, il existe donc un entier naturel N tel que pour tout entier $n \geqslant N$ : $|u_n - \ell| < 1$. Posons alors : $M = \max\{u_{n_0}, u_{n_0+1}, \cdots, u_{N-1}, u_N, \ell+1\}$ et $m = \min\{u_{n_0}, u_{n_0+1}, \cdots, u_{N-1}, u_N, \ell-1\}$.
La suite $(u_n)$ est majorée par M et minorée par $m$, elle est donc bornée. □

**THÉORÈME VII.7.2 UNICITÉ DE LA LIMITE**

Une suite ne peut pas avoir plusieurs limites.

**Démonstration**




Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite. Nous démontrerons ici que $(u_n)$ ne peut pas avoir deux limites finies distinctes. Les autres cas se démontrent de la même façon.
Si la suite $(u_n)$ avait deux limites distinctes $\ell$ et $\ell'$ en posant : $r = \dfrac{|\ell'-\ell|}{2}$ ($r$ est la demi-distance entre $\ell$ et $\ell'$) les intervalles $]\ell-r;\ell+r[$ et $]\ell'-r;\ell'+r[$ seraient disjoints. La suite $(u_n)$ aurait pour limite $\ell$, donc à partir d'un certain indice N, tous les termes de la suite $(u_n)$ seraient dans $]\ell-r;\ell+r[$, elle aurait de même pour limite $\ell'$, donc à partir d'un certain indice N', tous les termes de la suite $(u_n)$ seraient dans $]\ell'-r;\ell'+r[$ ; en posant : $N'' = \max\{N;N'\}$ ; à partir de l'indice $N''$ tous les termes de la suite $(u_n)$ seraient à la fois éléments de $]\ell-r;\ell+r[$ et de $]\ell'-r;\ell'+r[$, donc de leur intersection, c'est-à-dire de l'ensemble vide ; ce qui est impossible.
La suite $(u_n)$ ne peut donc pas avoir deux limites finies distinctes. □

Le théorème suivant est une conséquence immédiate des définitions de la limite d'une suite et d'une fonction.

**THÉORÈME VII.7.3**

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite définie explicitement par une relation du type : $u_n = f(n)$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ avec $L \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$

***Remarques***

***1.*** *La réciproque de ce théorème est fausse.*
***2.*** *Ce théorème n'est pas applicable dans le cas d'une suite définie par récurrence.*

## VII.7.2 Théorèmes de comparaisons

**THÉORÈME VII.7.4 THÉORÈME DES GENDARMES 1RE FORME**

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(w_n)_{n\geqslant n_0}$ trois suites.
Si $(v_n)$ et $(w_n)$ convergent vers une même limite $\ell$ et si pour tout entier $n \geqslant n_0$ :

$$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n;$$

alors $(u_n)$ converge vers $\ell$.

**Démonstration** Soit $r$ un réel strictement positif. il suffit donc de prouver qu'à partir d'un certain indice tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert, $\mathrm{I}_{\ell,r}$ de centre $\ell$ et de rayon $r$.
La suite $(v_n)$ converge vers $\ell$, donc à partir d'un certain indice, $\mathrm{N}_v$, sont dans $\mathrm{I}_{\ell,r}$.
La suite $(w_n)$ converge vers $\ell$, donc à partir d'un certain indice, $\mathrm{N}_w$, sont dans $\mathrm{I}_{\ell,r}$.
Posons : $\mathrm{N} = \max\{\mathrm{N}_v ; \mathrm{N}_w\}$. Pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$, on a : $\ell - r < v_n \leqslant u_n \leqslant w_n < \ell + r$.
Donc la suite $(u_n)$ converge vers $\ell$. □

***Exercice VII.7.1.*** ***Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$.***

***Solution*** *Pour tout entier $n > 0$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n}$.*
*Or on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ ; donc par produit par 2 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ ;*
*d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.* □

***Remarques***
***1.*** *Le théorème VII.7.4 reste vrai même si la condition $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ n'est pas vérifiée pour tout $n$, mais seulement à partir d'un certain indice.*
***2.*** *Plus généralement, tous les théorème de ce paragraphe reste vrai même si leur condition d'inégalité n'est pas vérifiée pour tout $n$, mais seulement à partir d'un certain indice.*

**COROLLAIRE VII.7.5 THÉORÈME DES GENDARMES 2E FORME**

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite.
S'il existe une suite positive $(d_n)_{n\geqslant n_0}$ et un réel $\ell$ tels que pour tout entier $n \geqslant n_0$ :

$$|u_n - \ell| \leqslant d_n;$$

alors $(u_n)$ converge vers $\ell$.

**Démonstration**Il suffit d'appliquer le théorème VII.7.4 avec les suites $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(w_n)_{n\geqslant n_0}$ de termes généraux : $v_n = d_n - \ell$ et $w_n = d_n + \ell$. □

***Exercice VII.7.2.*** ***Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.***

***Solution*** *Pour tout entier $n > 0$, on a : $|u_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{n}$.*
*Or on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ ; d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.* □

**THÉORÈME VII.7.6**

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites.
**(1)** Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et si pour tout entier $n \geqslant n_0$ : $v_n \leqslant u_n$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
**(2)** Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et si pour tout entier $n \geqslant n_0$ : $v_n \geqslant u_n$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

**Démonstration** Pour démontrer ce théorème, il suffit de s'assurer que dans les deux cas la suite $(u_n)$ vérifie les conditions de la définition VII.7.2.
**(1)** Soit $]\mathrm{A}; +\infty[$ un intervalle. La suite $v_n$ tend vers $+\infty$, donc à partir d'un certain indice N, tous les termes de la suite $(v_n)$ sont dans l'intervalle $]\mathrm{A}; +\infty[$. Ainsi, pour tout nombre entier $n$ supérieur ou égal à N, $u_n \geqslant v_n \geqslant \mathrm{A}$ ; c'est-à-dire : $v_n \in ]\mathrm{A}; +\infty[$. La suite $u_n$ diverge vers $+\infty$.
**(2)** se démontre de la même façon. □

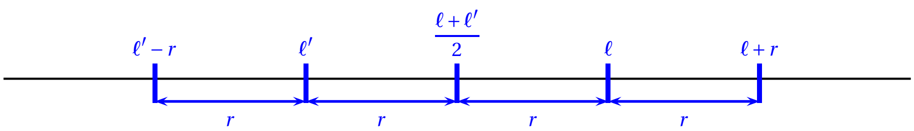
***Exercice VII.7.3.*** ***Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = n + \dfrac{(-1)^n}{n}$.***

***Solution*** *Pour tout entier $n > 0$, on a : $u_n \geqslant n - 1$.*
*Or on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1) = +\infty$ ; par comparaison, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.* □

**THÉORÈME VII.7.7**

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites convergentes et $\ell$ et $\ell'$ leurs limites respectives.
Si pour tout entier $n \geqslant n_0$ : $u_n \leqslant v_n$ alors $\ell \leqslant \ell'$

**Démonstration**



Supposons que : $\ell > \ell'$ ; posons alors : $r = \dfrac{\ell - \ell'}{2}$ ($r$ est la demi-distance entre $\ell$ et $\ell'$).

On a donc : $\ell' + r = \dfrac{\ell + \ell'}{2} = \ell - r$. Les intervalles $]\ell - r;\ell + r[$ et $]\ell' - r;\ell' + r[$ sont donc disjoints. À partir d'un certain indice N, tous les termes de la suite $(u_n)$ sont dans $]\ell - r;\ell + r[$ et à partir d'un certain indice N', tous les termes de la suite $(v_n)$ seraient dans $]\ell' - r;\ell' + r[$ ; en posant : $N'' = \max\{N;N'\}$ ; à partir de l'indice N″ on a : $\ell' - r < v_n < \dfrac{\ell + \ell'}{2} < u_n < \ell + r$ ce qui contredit : $u_n \leqslant v_n$.

Donc : $\ell \leqslant \ell'$. □

***Remarques***

***1.*** *En particulier, si M est majorant de $(u_n)$, alors : $\ell \leqslant M$.*

***2.*** *Si M est minorant de $(u_n)$, alors : $m \leqslant \ell$.*

***3.*** *Le théorème VII.7.7 devient faux si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes. Pour s'en convaincre il suffit d'étudier les cas des suites de termes généraux : $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = -\dfrac{1}{n}$*

### VII.7.2.a Suites de références

**THÉORÈME VII.7.8**

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, définies par : $u_n = \dfrac{1}{n}$ ; $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ ; $w_n = \dfrac{1}{n^3}$ ; $t_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ; ont pour limite 0.

**Démonstration** Soit $]-r;r[$ un intervalle contenant 0 et N un entier strictement plus grand que $\dfrac{1}{r^2}$.

Pour tout entier $n \geqslant$N, on a :

- $w_n \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant t_n$, car : $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant 1$ ;
- $n > \dfrac{1}{r^2}$ ; donc : $\sqrt{n} > \dfrac{1}{r}$ (car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante) ; d'où : $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < r$ (car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$) ; c'est-à-dire : $t_n < r$ ;
- donc finalement : $-r < 0 < w_n \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant t_n < r$.

Pour tout $r > 0$, il existe un indice N à partir duquel tous les termes des suites considérées sont dans l'intervalle $]-r;r[$, elles convergent donc vers 0. □

**THÉORÈME VII.7.9**

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par : $u_n = n$ ; $v_n = n^2$ ; $w_n = n^3$ ; $t_n = \sqrt{n}$ ; ont pour limite $+\infty$.

**Démonstration** Soit A un réel et N un entier strictement plus grand que $A^2$ et que 1.

Pour tout entier $n \geqslant$N, on a :

- $t_n \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, car : $1 < n$ ;
- $n > A^2$ ; donc : $\sqrt{n} > |A| \geqslant A$ (car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante) ; c'est-à-dire : $A < t_n$ ;
- donc finalement : $A < t_n \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Pour tout réel A, il existe un indice N à partir duquel tous les termes des suites considérées sont dans l'intervalle $]A;+\infty[$, elles divergent donc vers $+\infty$. □

***Remarque*** *Les théorèmes VII.7.8 et VII.7.9 peuvent également se déduire du théorème VII.7.3.*

## VII.7.3 Calcul algébrique de limites

### VII.7.3.a Somme de deux suites convergentes

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites convergentes et $\ell$ et $\ell'$ leurs limites respectives.
Démontrons que la suite de terme général $u_n + v_n$ converge vers $\ell + \ell'$.
Soit $r > 0$.
La suite $(u_n)$ converge vers $\ell$, il existe donc un entier N tel que pour tout entier $n \geqslant N$ :

$$|u_n - \ell| < \frac{r}{2}.$$

La suite $(v_n)$ converge vers $\ell'$, il existe donc un entier N' tel que pour tout entier $n \geqslant N'$ :

$$\left|v_n - \ell'\right| < \frac{r}{2}.$$

Posons : $N'' = \max\{N;N'\}$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a pour tout entier $n \geqslant N''$ :

$$\left|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')\right| \leqslant |u_n - \ell| + \left|v_n - \ell'\right| < r$$

Donc la suite de terme général $u_n + v_n$ converge vers $\ell + \ell'$.
En particulier, pour tout réel $k$, la suite de terme général $u_n + k$ converge vers $\ell + k$.

### VII.7.3.b Produit de deux suites convergentes

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites convergentes et $\ell$ et $\ell'$ leurs limites respectives.
Démontrons que la suite de terme général $u_n \times v_n$ converge vers $\ell \times \ell'$.
Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes donc, d'après le théorème VII.7.1 elle sont bornées. En appliquant le théorème VII.1.1 on en déduit l'existence des nombres réels M et M′ tels que pour tout entier $n \geqslant n_0$ : $|u_n| \leqslant \mathrm{M}$ et$|v_n| \leqslant \mathrm{M}'$ .
Soit $r > 0$.
La suite $(u_n)$ converge vers $\ell$, il existe donc un entier N tel que pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$ :

$$|u_n - \ell| < \frac{r}{2\mathrm{M}'}.$$

La suite $(v_n)$ converge vers $\ell'$, il existe donc un entier N' tel que pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}'$ :

$$\left|v_n - \ell'\right| < \frac{r}{2\mathrm{M}}.$$

Posons : $\mathrm{N}'' = \max\{\mathrm{N};\mathrm{N}'\}$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}''$ :

$$\left|(u_n \times v_n) - (\ell \times \ell')\right| \leqslant \left|u_n(v_n - \ell') + \ell'(u_n - \ell)\right| \leqslant |u_n| \times \left|v_n - \ell'\right| + \left|\ell'\right| \times |u_n - \ell| \leqslant |u_n| \times \frac{r}{2\mathrm{M}} + \left|\ell'\right| \times \frac{r}{2\mathrm{M}'}$$

D'où :

$$\left|(u_n \times v_n) - (\ell \times \ell')\right| \leqslant \frac{|u_n|}{\mathrm{M}} \times \frac{r}{2} + \frac{\ell'}{\mathrm{M}'} \times \frac{r}{2}$$

Or, par définition des nombres M et M′ et d'après la remarque consécutive au THÉORÈME VII.7.7, $\dfrac{|u_n|}{\mathrm{M}} \leqslant 1$ et $\dfrac{\ell'}{\mathrm{M}'} \leqslant 1$.
Donc par somme et par produit par $\dfrac{r}{2}$ qui est positif :

$$\left|(u_n \times v_n) - (\ell \times \ell')\right| \leqslant \frac{|u_n|}{\mathrm{M}} \times \frac{r}{2} + \frac{\ell'}{\mathrm{M}'} \times \frac{r}{2} \leqslant r.$$

Pour tout $r > 0$ il existe un indice à partir duquel tous les termes de la suite $(u_n \times v_n)$ sont dans l'intervalle de centre $\ell\ell'$ et de rayon $r$.
Donc la suite de terme général $u_n \times v_n$ converge vers $\ell \times \ell'$.
En particulier, pour tout réel $k$, la suite de terme général $ku_n$ converge vers $k\ell$.

### VII.7.3.c Inverse d'une suite convergente

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite convergeant vers une limite non-nulle $\ell$.
Démontrons que la suite de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ converge vers $\dfrac{1}{\ell}$.

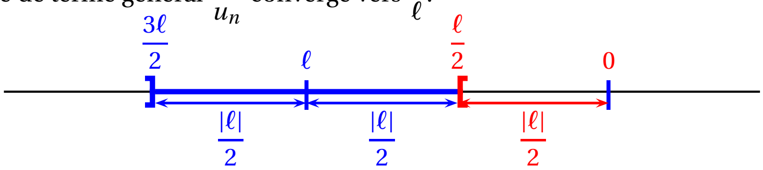



FIG. VII.5 –

À partir d'un certain indice N, tous les termes de la suite sont compris entre $\dfrac{\ell}{2}$ et $\dfrac{3\ell}{2}$.
On a alors : $|u_n| \geqslant \dfrac{|\ell|}{2}$ ; d'où :

$$\frac{1}{|u_n|} \leqslant \frac{2}{|\ell|}.$$

À partir de l'indice N, on a donc :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leqslant \frac{|u_n - \ell|}{|u_n|\,|\ell|} \leqslant \frac{2}{\ell^2}\,|u_n - \ell|.$$

Soit $r > 0$. À partir d'un certain indice N', tous les termes de la suite $(u_n)$ sont dans l'intervalle de centre $\ell$ et de rayon $\dfrac{\ell^2}{2}r$, on a alors : $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{\ell^2}{2}r$. D'où, par produit par $\dfrac{2}{\ell^2}$ :

$$\frac{2}{\ell^2}\,|u_n - \ell| \leqslant r.$$

Posons : $\mathrm{N}'' = \max\{\mathrm{N}, \mathrm{N}'\}$. À partir de l'indice $\mathrm{N}''$, on a donc :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leqslant r.$$

Pour tout $r > 0$, à partir d'un certain indice tous les termes de la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ sont dans l'interlvalle de centre $\frac{1}{\ell}$ et de rayon $r$, donc la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

### VII.7.3.d Quotient de deux suites convergentes

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ deux suites convergentes et $\ell$ et $\ell'$ leurs limites respectives (avec $\ell' \neq 0$).
Démontrons que la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.
D'après VII.7.3.c, la suite de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.
Donc daprès VII.7.3.b, la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.

### VII.7.3.e Cas général

Plus généralement nous admettons les résultats suivants concernant la limite de la somme, du produit ou du quotient de deux suites, ils se démontrent en utilisant des techniques semblables à celles utilisée ci-dessus. Le symbole « fi » signifie : forme indéterminée ; cela signifie que lers règles usuelles liant les opérations et le calcul de limites ne permettent pas de déterminer la limite éventuelle dans la configuration étudiée.

**Limite de la somme de deux suites**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $\ell'$ | $\ell'$ | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$ | $\ell + \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | fi |

**Limite du produit de deux suites**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $\ell'$ | $\ell'$ $(\ell' \neq 0)$ | $\ell'$ $(\ell' \neq 0)$ | 0 | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$ | $\ell\ell'$ | $\begin{cases} +\infty & \text{, si } \ell' > 0 \\ -\infty & \text{, si } \ell' < 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} -\infty & \text{, si } \ell' > 0 \\ +\infty & \text{, si } \ell' < 0 \end{cases}$ | fi | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

**Limite de l'inverse d'une suite**

On suppose ici que la suite de terme général $\frac{1}{v_n}$ est bien définie.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $\ell$ $(\ell \neq 0)$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}$ | $\frac{1}{\ell}$ | 0 | 0 | $\begin{cases} +\infty & \text{, si } (u_n) \text{est strictement positive à partir d'un certain indice} \\ -\infty & \text{, si } (u_n) \text{est strictement négative à partir d'un certain indice} \end{cases}$ |

**Limite du quotient de deux suites**

On suppose ici que la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ est bien définie.
Pour calculer la limite de la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$, il suffit de remarquer que pour tout nombre entier, $n$, ou elle est définie : $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$.
Le résultat désiré se déduit alors des considérations sur les limites de somme et d'inverse de suites.

### VII.7.4 Limites de suites géométriques

**LEMME VII.7.10**

Soit $\lambda$ un réel strictement positif.
**(1)** Si $\lambda > 1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = +\infty$.
**(2)** Si $\lambda < 1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$.

**Démonstration** Démontrons **(1)** .
Posons : $x = \lambda - 1$. On a : $x > 0$ ; donc, d'après l'inégalité de Bernoulli (voir exercice résolu IV.4.2. page 70), pour tout nombre entier supérieur à 2 : $(1+x)^n > 1 + nx$ ; c'est-à-dire : $\lambda^n > n(\lambda - 1) + 1$.
Or, d'après le théorème VII.7.3 : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n(\lambda-1)+1) = +\infty$ ; donc par comparaison (théorème VII.7.6) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = +\infty$.
Démontrons **(2)** .
Soit $\lambda \in ]0;1[$. Posons : $\lambda' = \dfrac{1}{\lambda}$. On a : $\lambda' > 1$ ; donc d'après **(1)** : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda'^n = +\infty$ ; d'où, par passage à l'inverse : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\lambda'^n} = 0$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$. □

**THÉORÈME VII.7.11**

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $a$. La limite de $(u_n)$ est donnée par le tableau suivant.

| | $q \leqslant -1$ | $\lvert q\rvert < 1$ | $q = 1$ | $1 < q$ |
|---|---|---|---|---|
| $a > 0$ | pas de limite | | $a$ | $+\infty$ |
| $a = 0$ | | 0 | | |
| $a < 0$ | pas de limite | | $a$ | $-\infty$ |

**Démonstration**
**1^er cas : $a = 0$ ou $q = 1$** Le résultat est immédiat car la suite est constante.
**2^e cas : $a > 0$ et $q \neq 1$**

**si $\lvert q\rvert < 1$** On a vu (§ VII.7.1.a) qu'il suffit de démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 0| = 0$.
Or pour tout indice $n$ : $|u_n - 0| = a\lvert q\rvert^n$ ; de plus, d'après le lemme VII.7.10 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert q\rvert^n =$, donc par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.

**si $1 < q$** On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ or $(u_n)$ est une suite à termes positifs, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**si $q \leqslant -1$** On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 1$ ; or les termes $u_n$ changent de signe avec la parité de $n$, donc $(u_n)$ n'a pas de limite.

**3^e cas : $a < 0$ et $q \neq 1$** On déduit les résultats désirés des résultats obtenus au cas précédent en multipliant par $-1$.

□

### VII.7.5 Exercices

**VII.7.a.** Donner un exemple de suite divergente et bornée.

**VII.7.b.** Donner un exemple de suite dont la limite est $+\infty$ et qui n'est pas croissante à partir d'un certain indice.

**VII.7.c.** Donner un exemple de suite non majorée qui ne diverge pas vers $+\infty$.

**VII.7.d.** Donner deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ , $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et

**a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 0$.
**b.** $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.
**c.** $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = -\infty$.
**d.** $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \pi$.
**e.** $(u_n + v_n)$ n'a pas de limite.

**VII.7.e.** Donner deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ , $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et

**a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 0$.
**b.** $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$.
**c.** $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = -\infty$.
**d.** $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = \pi$.
**e.** $(u_n v_n)$ n'a pas de limite.

**VII.7.f.** Démontrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

sont adjacentes.

**VII.7.g.** On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} v_0 = 12 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

**1.** Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $w_n = v_n - u_n$ ; est une suite géométrique.
**2.** Démontrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.
**3. a.** Démontrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $t_n =$

$2u_n + 3v_n$ ; est une suite constante.

**b.** En déduire la limite commune des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

**4.** Exprimer explicitement, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$.

## VII.8 Exercices

**VII.1. Suite de Fibonacci**

La suite de Fibonacci est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$u_0 = 0$ ; $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.
On se propose de déterminer une expression explicite du terme général de la suite.

**1.** Donner les dix premiers termes de la suite.

**2.** $(a_n)$ et $(b_n)$ sont deux suites géométriques de premier terme : $a_0 = b_0 = 1$.La raison de $(a_n)$ est positive et celle de $(b_n)$ est négative. Elles vérifient pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ : $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ et $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$.

**a.** Démontrer que les raisons des suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont les solutions de l'équation :

$$q^2 = q + 1 \qquad \text{(E)}$$

**b.** En déduire les expressions explicites des suites $(a_n)$ et $(b_n)$.

**3.** Déterminer le couple $(\alpha, \beta)$ de nombres réels solution du système : $\begin{cases} \alpha a_0 + \beta b_0 = u_0 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 = u_1 \end{cases}$.

**4.** On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$v_n = \alpha a_n + \beta b_n$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ : $v_{n+1} = v_n + v_{n-1}$

**5.** Conclure.

# Chapitre VIII

# Calcul des probabilités

## VIII.1 Calculs de probabilités

### VIII.1.1 Vocabulaire des événements

#### VIII.1.1.a Expérience aléatoire

- Lorsqu'on lance un dé, six résultats sont possibles : 1, 2, 3, 4, 5, 6.
  On dit qu'on a réalisé une *expérience aléatoire* (ou *épreuve*) comportant 6 *éventualités* ou *issues* et que l'*univers* associé a cette expérience aléatoire est : $\Omega = \{1;2;3;4;5;\ 6\}$.
- Le lancer de deux pièces de monnaies distinctes est une expérience aléatoire comportant 4 éventualités. L'univers associé à cette épreuve est : $\Omega = \{(\mathrm{P},\mathrm{P});(\mathrm{P},\ \mathrm{F});(\mathrm{F},\mathrm{P});(\mathrm{F},\mathrm{F})\}$.

Dans la première moitié de ce chapitre, les univers considérés sont des ensembles finis non vides.

#### VIII.1.1.b Événements liés à une expérience aléatoire

**DÉFINITIONS VIII.1.1**
Soit $\Omega$ l'univers associé à une expérience aléatoire.
**(1)** On appelle *événement* toute partie de $\Omega$.
**(2)** On appelle *événement élémentaire* tout singleton de $\Omega$.

***Exemples*** *Dans le lancer d'un dé :*
***1.*** *« obtenir un nombre pair » est l'événement* $\{2;4;6\}$ *;*
***2.*** *« obtenir un nombre premier pair » est l'événement élémentaire* $\{2\}$.

Dans une épreuve, un événement est réalisé s'il contient le résultat de l'expérience. Par exemple, si on obtient « 4 » lors d'un lancer de dé, l'événement « obtenir un nombre pair » est réalisé.
Le tableau suivant indique la signification des diverses expressions utilisées dans le langage des événements.

| **Vocabulaire des événements** | **Signification ensembliste** | **Notation** |
|---|---|---|
| Univers | Ensemble $\Omega$ | $\Omega$ |
| Éventualité ou issue | Élément de $\Omega$ | $\omega\ (\omega \in \Omega)$ |
| Événement | Partie de $\Omega$ | $\mathrm{A}(\mathrm{A} \subset \Omega)$ |
| Événement élémentaire | Singleton | $\{\omega\}(\omega \in \Omega)$ |
| Événement certain | Partie pleine | $\Omega$ |
| Événement impossible | Partie vide | $\varnothing$ |
| Événement « A ou B » | Réunion des parties A et B | $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ |
| Événement « A et B » | Intersection des parties A et B | $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ |
| Événements A et B incompatibles | Parties A et B disjointes | $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ |
| Événement contraire de A | Complémentaire de A dans $\Omega$ | $\overline{\mathrm{A}}$ |

***Exemples*** *Dans le lancer d'un dé, on considère les événements A : « obtenir un nombre pair » ; B : « obtenir un nombre premier » ; C : « obtenir 6 ».*
***1.*** *On a :* $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{2;3;4;5;6\}$ *;* $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ *est l'événement « obtenir un nombre pair ou premier ».*
***2.*** *On a :* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{2\}$ *;* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ *est l'événement « obtenir un nombre pair et premier ».*
***3.*** *Les événements B et C sont incompatibles.*

***4.*** *On a :* $\bar{A} = \{1;3;5\}$ *;* $\bar{A}$ *est l'événement : « obtenir un nombre impair ».*

## VIII.1.2 Probabilité d'un événement

### VIII.1.2.a Introduction

On lance un dé bien équilibré; l'univers associé à cette épreuve est : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
La chance d'apparition est la même pour chaque face.

- L'événement $\{2\}$ a une chance sur six d'être réalisé; on dit que la probabilité de cet événement est $\frac{1}{6}$.
- L'événement $\{1;5\}$ a deux chances sur six d'être réalisé, on dit que la probabilité de cet événement est $\frac{1}{3}$.
- « obtenir un nombre pair » est l'événement $\{2;4;6\}$, dont la probabilité est $\frac{1}{2}$.
- L'événement certain a six chances sur six d'être réalisé; sa probabilité est 1.
- L'événement impossible n'a aucune chance d'être réalisé; sa probabilité est 0.

**Définition VIII.1.2**
Soit $\Omega$ l'univers associé à une expérience aléatoire.
Une *probabilité* sur l'univers $\Omega$ est une application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ vers $[0;1]$, qui à toute partie A de $\Omega$ associe le nombre réel P(A) appelé probabilité de l'événement A et qui vérifie les conditions suivantes :
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent;
- la probabilité de l'événement certain est 1 ;
- la probabilité de l'événement impossible est 0.

***Remarques***
***1.*** *La probabilité de l'événement élémentaire* $\{\omega\}$ *est notée* $P(\omega)$.
***2.*** *Une probabilité P est parfaitement déterminée par la donnée des probabilités des événements élémentaires.*

| $\omega$ | $\omega_1$ | $\cdots$ | $\omega_i$ | $\cdots$ | $\omega_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $p_1$ | $\cdots$ | $p_i$ | $\cdots$ | $p_n$ |

***Exemples*** *On lance un dé pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.*
*La probabilité d'apparition d'un nombre pair est le double de la probabilité d'apparition d'un nombre impair et les probabilités d'apparition de deux nombres de même parité sont égales.*
***1.*** *Déterminer la probabilité d'apparition de chaque face du dé.*
*L'univers est :* $\Omega = \{1;2;3;4;5;\ 6\}$*. Soit* $p$ *la probabilité d'apparition d'un nombre pair et* $q$ *celle d'un nombre impair.*
*On a :* $p = 2q$.
*Or :* $P(\Omega) = 1$ *; donc :* $3p + 3q = 1$.
*On en déduit que :* $q = \frac{1}{9}$ *et* $p = \frac{2}{9}$.
*Le tableau ci-contre donne la probabilité d'apparition de chaque face du dé.*

| $\omega$ | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ |

***2.*** *Quelle est la probabilité d'apparition d'un nombre inférieur ou égal à 4 ?*
*La probabilité cherchée est celle de l'événement :* $A = \{1;2;3;4\}$.
*On a :* $P(A) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \frac{2}{3}$.

### VIII.1.2.b Équiprobabilité

Lorsque les événements élémentaires d'une expérience ont la même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité.*
Les situations d'équiprobabilité sont généralement suggérées par des expressions comme : « dé parfait », « dé non pipé », « pièce parfaite » « boules indiscernables au toucher », « cartes bien battues », « on tire au hasard » etc.

**Théorème VIII.1.1**
Soit P une probabilité définie sur un univers $\Omega$.
Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, pour tout événement A, on a : $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

**Démonstration** Les événements élémentaires ont tous la même probabilité, soit $p$ cette probabilité. On a : $P(\Omega) = 1$ ; donc : $p\,\text{card}(\Omega) = 1$ ; d'où : $p = \dfrac{1}{\text{card}(\Omega)}$.

On en déduit que pour tout événement A, on a : $P(A) = p\,\text{card}\,(A) = \dfrac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$. □

***Remarque*** *Les éventualités de A sont appelés cas favorables et celles de* $\Omega$*, cas possibles.*
*On écrit souvent :* $P(A) = \dfrac{\textit{nombres de cas favorables}}{\textit{nombres de cas possibles}}$.

***Exercice VIII.1.1.*** ***On lance deux dés parfaits et on note la somme des nombres obtenus. Quelle est la probabilité d'obtenir 10 ?***

***Solution*** *L'univers* $\Omega$ *est l'ensemble des couples d'éléments de :* $\{1;2;3;4;5;6\}$.
*On a :* $\text{card}\,(\Omega) = 6^2 = 36$. *« Obtenir 10 » est l'événement :* $\{(4;6),(5;5),(6;4)\}$.
*On est dans une situation d'équiprobabilité (dés parfaits), donc la probabilité cherchée est :* $\dfrac{1}{12}$. □

***Exercice VIII.1.2.*** ***On tire simultanément et au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de tirer le roi de cœur ?***

***Solution*** *L'univers* $\Omega$ *est l'ensemble des combinaisons de 5 cartes d'un jeu de 32, donc :* $\text{card}\,(\Omega) = \dbinom{32}{5} = 201\ 376$.
*Les cartes sont tirées au hasard, on est donc dans une situation d'équiprobabilité.*
*Soit A l'événement : « tirer le roi de cœur ». Réaliser A c'est choisir le roi de cœur puis tirer 4 cartes parmi les 31 cartes restantes ; donc :* $\text{card}\,(A) = \dbinom{31}{4} = 31\ 465$.
*La probabilité cherchée est donc :* $\dfrac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)} = \dfrac{31\ 465}{201\ 376} = \dfrac{5}{32} = 0{,}156\ 25$. □

### VIII.1.2.c Propriétés

**THÉORÈME VIII.1.2**
Soit P une probabilité définie sur un univers $\Omega$, A et B deux événements. On a :
**(1)** si $A \cap B = \varnothing$ alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ;
**(2)** $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

**Démonstration**
**(1)** Si l'un (au moins) des événements A ou B est impossible, alors la propriété est évidente. En effet si $A = \varnothing$ alors : $P(A \cup B) = P(\varnothing \cup B) = P(B)$ et $P(A) + P(B) = P(\varnothing) + P(B) = 0 + P(B) = P(B)$.
Si les deux événements sont possibles, alors quitte à numéroter à nouveau les éventualités on peut supposer que : $A = \{\omega_1;\dots;\omega_p\}$ et $B = \{\omega_{p+1};\dots;\omega_q\}$.
On a alors : $A \cup B = \{\omega_1;\dots;\omega_q\}$ ;
d'où : $P(A) + P(B) = \sum_{i=1}^{p} P(\omega_i) + \sum_{i=p+1}^{q} P(\omega_i) = \sum_{i=1}^{q} P(\omega_i) = P(A \cup B)$.
**(2)** Pour $B = \bar{A}$, on obtient : $P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$. □

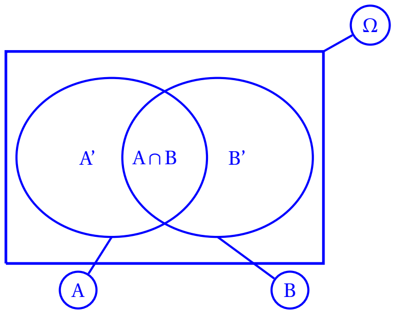
***Remarque*** *Plus généralement, par récurrence, on déduit de* **(1)** *que si* $A_1, \dots, A_n$ *sont des événements deux à deux incompatibles, alors :* $P(A_1) + \cdots + P(A_n) = P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$.
*Ce qui peut également s'écrire :* $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

On en déduit le théorème suivant.

**THÉORÈME VIII.1.3** **THÉORÈME FAIBLE DES PROBABILITÉS TOTALES**
Si $\{A_1,\dots,A_n\}$ est une partition d'un événement A, alors :
$P(A) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$.

**THÉORÈME VIII.1.4**
Soit P une probabilité définie sur un univers $\Omega$ et A, B deux événements.
On a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

**Démonstration**




Notons A' le complémentaire de $A\cap B$ dans A et B' le complémentaire de $A\cap B$ dans B.
On a : $A=(A\cap B)\cup A'$, avec $(A\cap B)\cap A'=\varnothing$ ;
donc : $P(A)=P(A\cap B)+P(A')$.
On a : $B=(A\cap B)\cup B'$, avec $(A\cap B)\cap B'=\varnothing$ ;
donc : $P(B)=P(A\cap B)+P(B')$.
Tout élément de $A\cup B$ est soit élément de A mais pas de B, soit élément de B mais pas de A soit élément des deux. $\{A', A\cap B, B'\}$ est donc une partition de $A\cup B$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A')+P(B')+P(A\cap B)\\ P(A\cup B)&=\big(P(A')+P(A\cap B)\big)+\big(P(B')+P(A\cap B)\big)-P(A\cap B)\\ P(A\cup B)&=P(A\cap B)+P(A\cup B)\\ P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\end{aligned}$$

. □

**Exercice VIII.1.3.** ***Une urne contient 15 boules, numérotées de 1 à 15. On tire au hasard une boule et on désigne par N son numéro. On désigne respectivement par A et B les événements « N est pair » et « N est multiple de trois ».***
***1. Déterminer la probabilité des événements A, B et $A\cap B$.***
***2. Calculer la probabilité des événements $\bar{A}$, $\bar{B}$ et $A\cup B$.***

***Solution*** **1.** *L'univers est :* $\Omega=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15\}$ *;*
*La boule est tirée au hasard on a donc équiprobabilité.*
*Pour tout événement élémentaire* $\{\omega\}$, *on a donc :* $P(\omega)=\dfrac{1}{15}$ *;*
*d'où :* $P(A)=P(\{2;4;6;8;10;12;14\})=\dfrac{7}{15}$ *;* $P(B)=P(\{3;6;9;12;15\})=\dfrac{5}{15}=\dfrac{1}{3}$
*et* $P(A\cap B)=P(\{6;12\})=\dfrac{2}{15}$.
**2.** *On a :* $P(\bar{A})=1-P(A)=\dfrac{8}{15}$ *;* $P(\bar{B})=1-P(B)=\dfrac{2}{3}$ *;*
*et* $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{7}{15}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{15}=\dfrac{2}{3}$. □

## VIII.2 Variable aléatoire

### VIII.2.1 Introduction

On lance deux dés bien équilibrés (un vert et un rouge) et on s'intéresse à la somme, X, obtenue.
L'univers est l'ensemble des couples d'éléments de $\{1;2;3;4;5;6\}$ donc : $\text{card}(\Omega)=36$ ; les dés étant bien équilibrés, chaque événement élémentaire a la même probabilité : $\dfrac{1}{36}$. L'ensemble des valeurs possible de X est : $\{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$. On désigne par : $X=2$ ; l'événement : « la somme obtenue est 2 ». Afin de mieux connaître la « loi de probabilité de X », on dresse le tableau ci-contre. L'événement : $X=8$ ; est réalisé 5 fois, donc : $P(X=8)=\dfrac{5}{36}$.
En procédant de même pour tout les valeurs possibles de X, on obtient le tableau ci-dessous.

| *r* \ *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=n)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

**DÉFINITION VIII.2.1**
On appelle *variable aléatoire* X sur un univers Ω toute application de Ω vers $\mathbb{R}$.

***Notations et vocabulaire***
1. $X(\Omega)$ *est appelé* univers image *de* Ω *par X.*
2. $(X=x_i)$ *désigne l'événement « X prend la valeur* $x_i$ *».*
3. $(X\leqslant a)$ *désigne l'événement « X prend une valeur inférieure ou égal à* $a$ *».*

**DÉFINITION VIII.2.2**
Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.
La *loi de probabilité* d'une variable aléatoire X sur Ω est l'application qui à toute valeur $x_i$ prise par X associe $P(X=x_i)$.

Il est d'usage de représenter une loi de probabilité par un tableau et il recommandé de vérifier que : $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$.

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ |

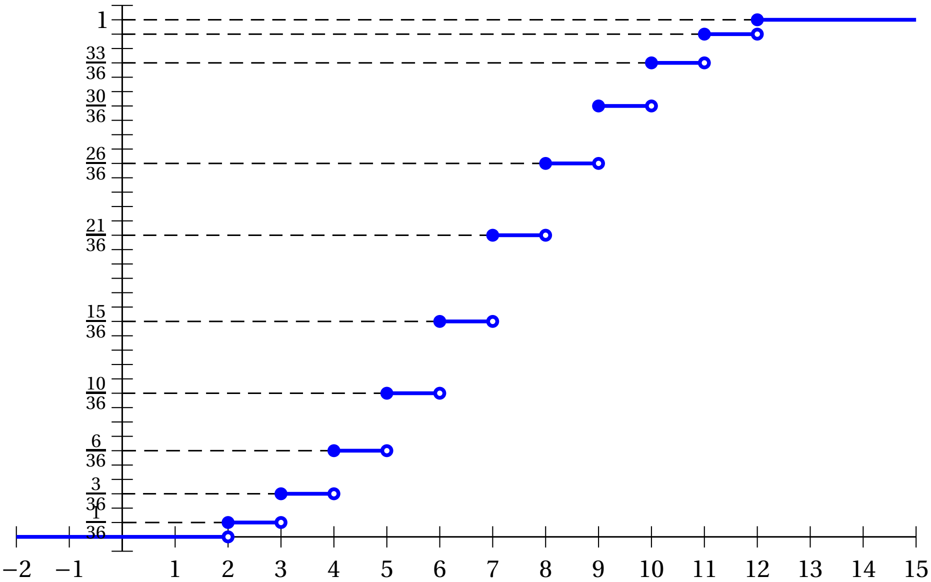
### VIII.2.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

**DÉFINITION VIII.2.3**
Soit une variable aléatoire X définie sur un univers $\Omega$ muni d'une probabilité P.
La fonction de répartition de X est l'application F de $\mathbb{R}$ vers $[0,1]$ définie par :

$$F(x) = P(X \leqslant x).$$

***Exemple*** *Reprenons l'exemple introductif ; F est définie par :*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \textit{si } x < 2; \\ \frac{1}{36} & , \textit{si } 2 \leqslant x < 3; \\ \frac{3}{36} & , \textit{si } 3 \leqslant x < 4; \\ \frac{6}{36} & , \textit{si } 4 \leqslant x < 5; \\ \frac{10}{36} & , \textit{si } 5 \leqslant x < 6; \\ \frac{15}{36} & , \textit{si } 6 \leqslant x < 7; \\ \frac{21}{36} & , \textit{si } 7 \leqslant x < 8; \\ \frac{26}{36} & , \textit{si } 8 \leqslant x < 9; \\ \frac{30}{36} & , \textit{si } 9 \leqslant x < 10; \\ \frac{33}{36} & , \textit{si } 10 \leqslant x < 11; \\ \frac{35}{36} & , \textit{si } 11 \leqslant x < 12; \\ 1 & , \textit{si } 12 \leqslant x. \end{cases}$$




***Remarques***
***1.*** *F est une fonction en escalier, définie et croissante sur* $\mathbb{R}$*.*
***2.*** *La représentation graphique de F est l'équivalent, en probabilité, de la courbe des fréquences cumulées croissantes en statistique.*

### VIII.2.3 Caractéristiques d'une variable aléatoire

#### VIII.2.3.a Espérance mathématique

Un casino propose le jeu suivant : le joueur mise 16 euros, lance un dé bien équilibré et la banque lui rembourse le carré du nombre obtenu. Ce jeu est-il avantageux pour le joueur ?
Désignons par X le gain, en euros, du joueur pour une partie. S'il obtient 6 on lui rembourse 36, il a donc gagné 20 euros.
L'univers est : $\Omega = \{1;2;3;4;5,\ 6\}$ ;
l'univers image est donc :
$X(\Omega) = \{-15;-12;-7;0;9;20\}$.
Le dé étant bien équilibré, on a équiprobabilité sur l'univers et donc, ici, sur l'univers image ; on en déduit la loi de probabilité de X.

| $x_i$ | $-15$ | $-12$ | $-7$ | $0$ | $9$ | $20$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Sur un 600 parties un joueur réalisera en moyenne 100 fois chaque événement élémentaire. Le gain moyen par partie sera donc :

$$\frac{1}{600}\left(100\times(-15)+100\times(-12)+100\times(-7)+100\times 0+100\times 9+100\times 20\right) = -\frac{5}{6}$$

On peut donc espérer perdre en moyenne $\frac{5}{6}$ € par partie.
On remarque que : $\frac{5}{6} = -15\times\frac{1}{6} - 12\times\frac{1}{6} - 7\times\frac{1}{6} + 0\times\frac{1}{6} + 9\times\frac{1}{6} + 20\times\frac{1}{6}$.
Plus généralement, on a la définition suivante.

**Définition VIII.2.4**

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, \dots, p_n$.
On appelle *espérance mathématique* de X le nombre réel, noté E(X), défini par :

$$\mathrm{E(X)} = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

***Remarques***

1. *L'espérance mathématique est l'équivalent, en probabilité, de la moyenne en statistique.*
2. *L'espérance est donc une caractéristique de position.*
3. *Pour une variable aléatoire constante $\omega \mapsto \lambda$, ($x_1 = \cdots = x_n = \lambda$) on a :* $\mathrm{E}(\lambda) = \lambda$.
4. *Pour calculer l'espérance d'un variable aléatoire, il peut-être commode de reprendre la tableau de la loi de probabilité de la façon suivante.*

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | *Total* |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | 1 |
| $x_i p_i$ | $x_1 p_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n p_n$ | *E(X)* |

**Exercice VIII.2.1.** ***Calculer l'espérance de la variable aléatoire de l'exemple introductif (§ VIII.2.1 page 108).***

***Solution***

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | *Total* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(\mathrm{X} = n)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | 1 |
| $n\mathrm{P}(\mathrm{X} = n)$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{12}{36}$ | $\frac{20}{36}$ | $\frac{30}{36}$ | $\frac{42}{36}$ | $\frac{40}{36}$ | $\frac{36}{36}$ | $\frac{30}{36}$ | $\frac{22}{36}$ | $\frac{12}{36}$ | E(X) = 7 |

*L'espérance mathématique de X est donc :* 7. □

## VIII.2.3.b Variance, écart type

La variance et l'écart type sont des nombres réels positifs qui traduisent la façon dont sont dispersées les valeurs d'une variable aléatoire autour de son espérance ; plus la variance et l'écart type seront grands plus les valeurs seront dispersées. Ce sont des caractéristiques de dispersions. Dans une classe un devoir a été donné dans deux matières, on choisit un élève au hasard et on désigne par X sa note dans la première matière et par Y sa note dans la seconde matière. Les lois de probabilités des variables aléatoires X et Y sont données dans les tableaux ci-contre.

| $n$ | 10 |
|---|---|
| $\mathrm{P}(\mathrm{X} = n)$ | 1 |

| $n$ | 0 | 20 |
|---|---|---|
| $\mathrm{P}(\mathrm{Y} = n)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

Dans les deux cas l'espérance est 10 et pourtant les résultats de la classe dans les deux matières sont, en un certain sens, opposés : dans la première tous les élèves ont 10 et dans la seconde les notes sont réparties aux extrêmes.

**Définitions VIII.2.5**

Soit X une variable aléatoire.

**(1)** On appelle *variance* de X le nombre réel, noté V(X), défini par : $\mathrm{V(X)} = \mathrm{E}\Big(\big(\mathrm{X} - \mathrm{E(X)}\big)^2\Big)$.

**(2)** On appelle *écart type* de X le nombre réel, noté σ(X), défini par : $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V(X)}}$.

***Remarques***

1. *La variance est donc la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.*
2. *La variance étant une moyenne de carrés, on a introduit sa racine carrée pour mieux rendre compte de la dispersion.*
3. *La définition de la variance n'est pas très pratique pour les calculs.*

### VIII.2.3.c Propriétés de l'espérance et de la variance

**Théorème VIII.2.1**

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers $\Omega$ et $\lambda$ un réel.

**(1)** $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ ;

**(2)** $E(X+\lambda) = E(X) + \lambda$ ;

**(3)** $E(\lambda X) = \lambda E(X)$ ;

**(4)** $E(X - E(X)) = 0$ ;

**(5)** $V(X+\lambda) = V(X)$ ;

**(6)** $V(\lambda X) = \lambda^2 V(X)$.

**Démonstration** Notons $\omega_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les éventualités et $p_i$ les probabilités des événements élémentaires associés.

**(1)** On a : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)p_i$ et $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} Y(\omega_i)p_i$.

De même : $E(X+Y) \sum_{i=1}^{n} (X+Y)(\omega_i)p_i = \sum_{i=1}^{n} \left(X(\omega_i)p_i + Y(\omega_i)p_i\right) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)p_i + \sum_{i=1}^{n} Y(\omega_i)p_i = E(X) + E(Y)$.

**(2)** On déduit **(2)** de **(1)** en prenant pour Y la variable aléatoire constante $\omega \mapsto \lambda$.

**(3)** $E(\lambda X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda X(\omega_i)p_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)p_i = \lambda E(X)$.

**(4)** D'après **(2)** (avec $\lambda = -E(X)$) : $E(X - E(X)) = E(X) - E(X) = 0$.

**(5)** $V(X+\lambda) = E\left(\left(X+\lambda - E(X+\lambda)\right)^2\right) = E\left(\left(X+\lambda - E(X) - \lambda\right)^2\right) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = V(X)$.

**(6)** $V(\lambda X) = E\left(\left(\lambda X - E(\lambda X)\right)^2\right) = E\left(\left(\lambda X - \lambda E(X)\right)^2\right) = E\left(\lambda^2\left(X - E(X)\right)^2\right) = \lambda^2 E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = \lambda^2 V(X)$. □

***Remarques***

***1.*** *En pratique toutes ces propriétés sont naturelles, afin de les illustrer prenons pour univers une classe où un devoir a été donné ; la moyenne de la classe est* 5 *et la variance* 3*. On considère l'expérience aléatoire suivante : on choisit au hasard un élève et désigne par X sa note. X est une variable aléatoire et on a :* $E(X) = 5$ *et* $V(X) = 3$.

*Si on décide d'ajouter* 1 *point à chaque élève, alors la moyenne augmentera de* 1 *point :*
$E(X+1) = E(X) + 1 = 6$.

*En revanche le fait d'ajouter 1 point à chaque élève ne changera pas la façon dont les notes sont réparties autour de la moyenne, c'est-à-dire :* $V(X+1) = V(X)$.

*Si on décide de multiplier par* 2 *la note de chaque élève, alors la moyenne sera multipliée par* 2 *elle aussi :* $E(2X) = 2E(X) = 10$. *De plus en multipliant par* 2 *les notes, on multiplie également par* 2 *les écarts à la moyenne et donc par 4 leur carré ; par conséquent :* $V(2X) = 4V(X)$.

***2.*** *Pour donner un sens intuitif à la propriété **(1)** gardons l'exemple de la classe. Un devoir constitué d'un exercice sur* 7 *points et d'un problème sur* 13 *points à été donné. Cette fois-ci X désigne la note obtenue à l'exercice et Y la note obtenue au problème. La note obtenue au devoir est alors* $X+Y$*. La moyenne de la classe au devoir est la somme des moyennes de l'exercice et du problème :* $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

***3.*** *On déduit des deux dernières propriétés que :* $\sigma(X+\lambda) = \sigma(X)$ *et* $\sigma(\lambda X) = |\lambda|\sigma(X)$.

***4.*** *On déduit des propriétés **(1)** et **(3)** que pour tous réels* $\alpha, \beta$ *; on a :* $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$.

*On dit que l'espérance est* linéaire.

D'après le théorème VIII.2.1 l'espérance de la somme de deux variables aléatoires est la somme des espérances. Il est donc naturelle de se demander s'il n'en est pas de même pour le produit. Prenons un exemple.

On dispose de deux rectangles, les dimensions de l'un sont 2 par 3 et celles de l'autre sont 4 par 5.

On choisit un rectangle au hasard et on désigne par $\ell$ sa largeur et L son longueur. L'aire est donc la variable aléatoire $L\ell$.

La moyenne des largeurs est : $E(\ell) = 3$.

La moyenne des longueurs est : $E(L) = 4$.

Les aires sont 6 et 20 donc : $E(L\ell) = 13$.

On constate, ici, que : $E(L\ell) \neq E(L) \times E(\ell)$.

Nous avons précédemment remarqué que la définition de la variance ne conduisait pas à un calcul aisé. le théorème suivant remédie à cette carence.

**Théorème VIII.2.2 Formule de König**[1]

Soit X une variable aléatoire. On a : $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

**Démonstration** Par définition :

$$V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E\left(X^2 - \underbrace{2E(X)}_{\alpha}X + \underbrace{E^2(X)}_{\beta}\right).$$

Donc par linéarité et d'après le propriété **(2)** du théorème VIII.2.1 :

$$V(X) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E^2(X) ;$$

[1] König, Johann Samuel (1712–1757)

d'où l'on tire : $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$. □

***Exercice VIII.2.2.*** ***Calculer la variance et l'écart type de la variable aléatoire de l'exemple introductif (§ VIII.2.1 page 108).***

***Solution***

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | *Total* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=n)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | 1 |
| $nP(X=n)$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{3}{18}$ | $\frac{6}{18}$ | $\frac{10}{18}$ | $\frac{15}{18}$ | $\frac{21}{18}$ | $\frac{20}{18}$ | $\frac{18}{18}$ | $\frac{15}{18}$ | $\frac{11}{18}$ | $\frac{6}{18}$ | $E(X) = 7$ |
| $n^2P(X=n)$ | $\frac{2}{18}$ | $\frac{9}{18}$ | $\frac{24}{18}$ | $\frac{50}{18}$ | $\frac{90}{18}$ | $\frac{147}{18}$ | $\frac{160}{18}$ | $\frac{162}{18}$ | $\frac{150}{18}$ | $\frac{121}{18}$ | $\frac{72}{18}$ | $E(X^2) = \frac{329}{6}$ |

*La variance de X est donc :* $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{329}{6} - 49 = \frac{35}{6}$.

*On en déduit l'écart type :* $\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{6}}$. □

# Chapitre IX

# Translations et homothéties

Dans tout ce chapitre, $\mathscr{P}$ désignera le plan affine euclidien orienté, $\mathscr{E}$ désignera l'espace affine euclidien orienté (voir règle des trois doigts de la main droite dans le texte précédant la définition IX.2.2 page 118) et $\mathscr{W}$ désignera $\mathscr{P}$ ou $\mathscr{E}$. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur l'application du plan ou de l'espace dans lui-même, les images de points A, B, M... seront respectivement désignée par : A′ ; B′ ; M′ ...

## IX.1 Introduction

### IX.1.1 Définitions

$\mathrm{Id}_{\mathscr{W}}$ désigne l'application identique de $\mathscr{W}$, c'est-à-dire l'application de $\mathscr{W}$ dans lui-même qui à tout point M associe lui-même.

**DÉFINITION IX.1.1**

**(1)** Une transformation plane est une application bijective du plan dans lui-même.

**(2)** Une transformation de l'espace est une application bijective de $\mathscr{E}$ dans lui-même.

Une application de $\mathscr{W}$ dans lui-même est donc une transformation si, et seulement si, il existe une application $f^{-1}$ de $\mathscr{W}$ dans lui-même telle que pour tous points M et M′ de $\mathscr{W}$ :

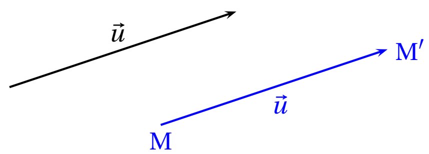
$$\mathrm{M}' = f(\mathrm{M}) \iff \mathrm{M} = f^{-1}(\mathrm{M}').$$

On dit alors que $f$ et $f^{-1}$ sont des transformations réciproques et on a : $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathscr{W}}$.

**DÉFINITION IX.1.2**

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathscr{W}$. La translation de vecteur $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, est l'application de $\mathscr{W}$ dans lui-même qui à tout point M associe le point M′, tel que :

$$\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \vec{u}.$$




***Remarque*** *Une translation est déterminée par son vecteur.*

**THÉORÈME IX.1.1**

**(1)** Les translations de $\mathscr{W}$ sont des transformations de $\mathscr{W}$.

**(2)** Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathscr{W}$. La réciproque de $t_{\vec{u}}$ est $t_{-\vec{u}}$.

**Démonstration** Pour tous points M et M′ de $\mathscr{W}$, on a :

$$\mathrm{M}' = t_{\vec{u}}(\mathrm{M}) \iff \overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \vec{u} \iff \overrightarrow{\mathrm{M}'\mathrm{M}} = -\vec{u} \iff \mathrm{M} = t_{-\vec{u}}(\mathrm{M}').$$

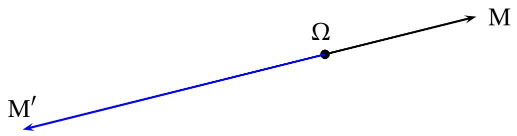
□

**DÉFINITION IX.1.3**

Soit $\Omega$ un point de $\mathscr{W}$ et $k$ un nombre réel non nul. L'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$, notée $h_{\Omega,k}$, est l'application de $\mathscr{W}$ dans lui-même qui à tout point M associe le point M′, tel que :

$$\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'} = k\,\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}.$$

Pour $k = -2$, on obtient la figure suivante.




***Remarques***
***1.*** *Une homothétie est déterminée par son centre et son rapport.*
***2.*** *Les homothéties de rapport $-1$ sont les symétries centrales.*

**Cas particulier** L'application identique est à la fois une homothétie de rapport 1 et une translation de vecteur nul, pour tout point $\Omega$ : $h_{\Omega,1} = t_{\vec{0}} = \mathrm{Id}_{\mathscr{W}}$.

***Remarques***
***1.*** *Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $t_{\vec{u}}$ n'a pas de point fixe.*
***2.*** *Si $k \neq 0$, alors $\Omega$ est l'unique point fixe de $h_{\Omega,k}$.*

**Théorème IX.1.2**
**(1)** Les homothéties de $\mathscr{W}$ sont des transformations de $\mathscr{W}$.
**(2)** Soit $\Omega$ un point de $\mathscr{W}$ et $k$ un nombre réel non nul. La réciproque de $h_{\Omega,k}$ est $h_{\Omega,\frac{1}{k}}$.

**Démonstration** Pour tous points M et M′ de $\mathscr{W}$, on a :

$$\mathrm{M}' = h_{\Omega,k}(\mathrm{M}) \iff \overrightarrow{\Omega \mathrm{M}'} = k\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}} \iff \overrightarrow{\Omega \mathrm{M}} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}'} \iff \mathrm{M} = h_{\Omega,\frac{1}{k}}(\mathrm{M}').$$

□

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la définition IX.1.3.

**Théorème IX.1.3**
Par une homothétie un point, son image et le centre sont alignés.

## IX.1.2 Propriétés caractéristiques

**Théorème IX.1.4**
**(1)** Soit $t$ une translation de $\mathscr{W}$. Pour tous points A et B, d'images respectives A′ et B′ par $t$ : $\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.
**(2)** Soit $f$ une application de $\mathscr{W}$ dans lui-même telle que pour tous points A et B, d'images respectives A′ et B′ par $f$ : $\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$. $f$ est une translation.

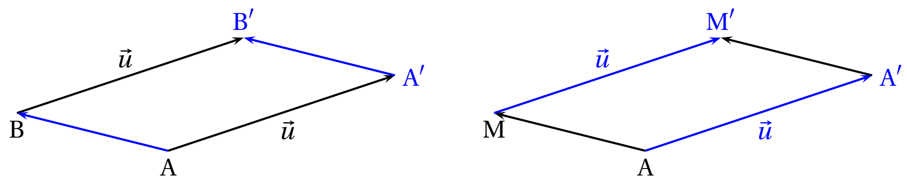
**Démonstration (1)** Soit $\vec{u}$ le vecteur de la translation $t$. Pour tous points A et B, d'images respectives A′ et B′ par $t$ :

$$\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} = \overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BB}'} = -\vec{u} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}.$$

**(2)** Soit A un point et A′ son image par $f$. Posons : $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AA}'}$. Pour tout point M de $\mathscr{W}$, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AA}'} + \overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{M}'} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AA}'} + \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \vec{u} - \overrightarrow{\mathrm{MA}} = \vec{u}.$$

Donc $f$ est la translation de vecteur $\vec{u}$. □




***Remarque*** *Nous retiendrons que les translations sont les applications qui conservent les vecteurs (elles conservent donc la direction, le sens et la norme).*

**Théorème IX.1.5**
**(1)** Soit $h$ une homothétie de $\mathscr{W}$ de rapport $k$ (avec $k \neq 0$ et $k \neq 1$).
Pour tous points A et B, d'images respectives A′ et B′ par $h$ : $\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.
**(2)** Soit $k$ un nombre réel (avec $k \neq 0$ et $k \neq 1$) et $f$ une application de $\mathscr{W}$ dans lui-même telle que pour tous points A et B, d'images respectives A′ et B′ par $f$ : $\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. $f$ est une homothétie de rapport $k$.

**Démonstration (1)** Soit $\Omega$ le centre de l'homothétie $h$. Pour tous points A et B, d'images respectives $A'$ et $B'$ par $h$ :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{\Omega B'} - \overrightarrow{\Omega A'} = k\overrightarrow{\Omega B} - k\overrightarrow{\Omega A} = k\left(\overrightarrow{\Omega B} - \overrightarrow{\Omega A}\right) = k\overrightarrow{AB}.$$

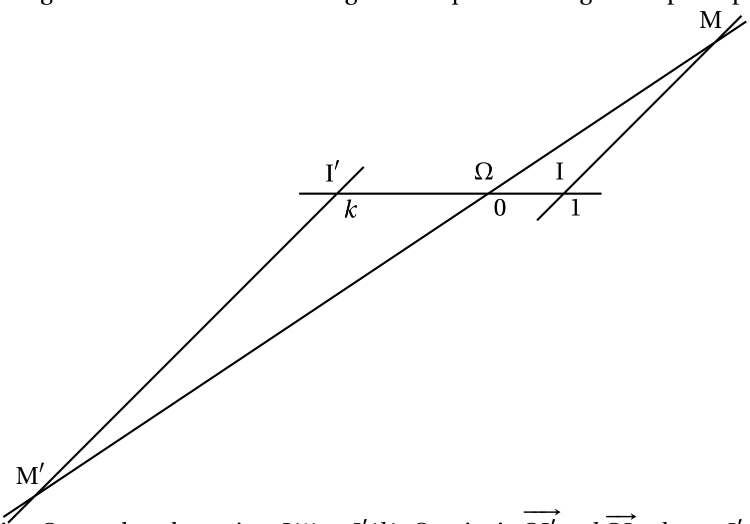
**(2)** Soit A un point et $A'$ son image par $f$. Le système de points pondérés $\{(A,1)\,(A',-k)\}$ est de masse non nulle, $1-k$, il a donc un barycentre, $\Omega$. On a : $\overrightarrow{\Omega A} - k\overrightarrow{\Omega A'} = \vec{0}$ ; donc : $\overrightarrow{\Omega A} = k\overrightarrow{\Omega A'}$. Pour tout point M de $\mathscr{W}$, d'image $M'$ par $f$, on a :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega A'} + \overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{\Omega A} + k\overrightarrow{AM} = k\left(\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{AM}\right) = k\overrightarrow{\Omega M}.$$

Donc $f$ est l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$. □

***Remarque*** *Les homothéties de rapport $k$ (avec $k \neq 0$ et $k \neq 1$) sont donc les applications de $\mathscr{W}$ dans lui-même qui multiplient les vecteurs par $k$.*

Le théorème IX.1.5 fournit également une construction géométrique de l'image d'un point par une homothétie.




Sur un axe gradué d'origine $\Omega$, on place les points I(1) et $I'(k)$. On ainsi : $\overrightarrow{\Omega I'} = k\overrightarrow{\Omega I}$ ; donc : $I' = h_{\Omega,k}(I)$.
On se propose de construire l'image, $M'$, d'un point M non élément de la droite graduée.

D'après le théorème IX.1.3, $M'$ est un point de $(\Omega M)$. D'autre part, d'après le théorème IX.1.5, les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{I'M'}$ sont colinéaires, donc les droites $(I'M')$ et (IM) sont parallèles.
$M'$ est donc le point d'intersection de $(\Omega M)$ avec la parallèle à (IM) issue de $I'$.

**DÉFINITION IX.1.4**
Une homothétie-translation de rapport $k$ (avec $k \in \mathbb{R}^\star$) est une application de $\mathscr{W}$ dans lui-même qui multiplie les vecteurs par $k$.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate des théorèmes IX.1.4 et IX.1.5

**THÉORÈME IX.1.6**
Une homothétie-translation de rapport $k$ (avec $k \in \mathbb{R}^\star$) est une translation si $k = 1$ et une homothétie de rapport $k$ si $k \neq 1$.

***Remarque*** *En particulier, les homothétie-translations sont des transformations.*

### IX.1.3 Compositions de translations et d'homothéties

**THÉORÈME IX.1.7**
**(1)** La composée d'une homothétie-translation de rapport $k$ (avec $k \in \mathbb{R}^\star$) par une homothétie-translation de rapport $k'$ (avec $k' \in \mathbb{R}^\star$) est une homothétie-translation de rapport $kk'$.
**(2)** La réciproque d'une homothétie-translation de rapport $k$ (avec $k \in \mathbb{R}^\star$) est une homothétie-translation de rapport $\frac{1}{k}$.

**Démonstration (1)** La première multiplie les vecteurs par $k$ et la suivante par $k'$ donc la composée multiplie les vecteurs par $kk'$.
**(2)** L'homothétie-translation de rapport $k$ multiplie les vecteurs par $k$, donc sa réciproque les divise par $k$ ; elle les multiplie donc par $\frac{1}{k}$. □

***Remarque*** *D'après le théorème IX.1.7 :*

- *la composée de deux translations est une translation ;*
- *la réciproque d'une translation est une translation ;*
- *La composée d'une translation et d'une homothétie de rapport $k$ (avec $k \neq 1$) est une homothétie de rapport $k$ ;*
- *La composée de deux homothéties de rapport $k$ et $k'$ est une homothétie de rapport $kk'$ si $kk' \neq 1$ et une translation si $kk' = 1$.*

**DÉFINITION IX.1.5**

Un groupe de transformations de $\mathscr{W}$ est un ensemble non vide, G, de transformations de $\mathscr{W}$ vérifiant les propriétés suivantes :

**(1)** Pour tous éléments $f$ et $g$ de G, $f \circ g$ est élément de G ;

**(2)** Pour tout élément $g$ de G, $g^{-1}$ est élément de G.

On dit que G est stable par composition et par passage à l'inverse.

***Remarques***

***1.*** $\mathrm{Id}_{\mathscr{W}}$ *est élément de tout groupe de transformations de* $\mathscr{W}$.

***2.*** *Pour démontrer qu'un ensemble non vide, G, de transformation de $\mathscr{W}$ est un groupe de transformations de $\mathscr{W}$, il suffit de démontrer que pour tous éléments $f$ et $g$ de G, $f \circ g^{-1}$ est élément de G.*

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème IX.1.7.

**THÉORÈME IX.1.8**

**(1)** L'ensemble des homothétie-translations de $\mathscr{W}$ est un groupe de transformations.

**(2)** L'ensemble des translations de $\mathscr{W}$ est un groupe de transformations.

## IX.2 Action sur certains objets géométriques

**THÉORÈME IX.2.1**

Les homothétie-translations de $\mathscr{W}$ de rapport $k$ multiplient les distances par $|k|$.

**Démonstration** Soit A et B deux points de $\mathscr{W}$. On a : $\mathrm{A'B'} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}\right\| = \left\|k\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| = |k|\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| = |k|\mathrm{AB}$. □

***Remarque*** *Les seules homothétie-translations à être des isométries sont les homothétie-translations de rapport 1 ou −1, c'est-à-dire les translations et les symétries centrales.*

**THÉORÈME IX.2.2**

Les homothétie-translations de $\mathscr{W}$ conservent le barycentre.

**Démonstration** Pour mieux comprendre ce qu'il se passe, démontrons cette propriété dans le cas du barycentre de trois points, la propriété générale se démontrerait suivant le même principe. Soit G le barycentre d'un système $\{(\mathrm{A},\alpha),(\mathrm{B},\beta),(\mathrm{C},\gamma)\}$ et A′, B′, C′, G′ les images respectives de A, B, C, G par une homothétie-translation, $f$, de rapport $k$. On a :

$$\vec{0} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{GB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{GC}} = \alpha k\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \beta k\overrightarrow{\mathrm{GB}} + \gamma k\overrightarrow{\mathrm{GC}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{G'A'}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{G'B'}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{G'C'}}.$$

Donc $f$ conserve le barycentre. □

Plus généralement.

**DÉFINITION IX.2.1**

Une application affine de $\mathscr{W}$ est une application de $\mathscr{W}$ dans lui-même qui conserve le barycentre.

Les homothétie-translations sont donc des cas particuliers de transformations affines.

**COROLLAIRE IX.2.3**

Les homothétie-translations de $\mathscr{W}$ conservent l'alignement.

**Démonstration** Si trois points sont alignés alors l'un est barycentre des deux autres. Or les homothétie-translations de $\mathscr{W}$ conservent le barycentre, donc les trois points images sont alignés. On étend ensuite, de proche en proche, cette propriété au cas de $n$ points alignés avec $n \geqslant 3$. □

**THÉORÈME IX.2.4**

Les homothétie-translations de $\mathscr{W}$ conservent l'égalité vectorielle.

**Démonstration** Soit A, B, C et D quatre points de $\mathscr{W}$ et A′, B′, C′ et D′ leurs images respectives par une homothétie-translation, $f$, de rapport $k$. On a : $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{C'D'}} = k\overrightarrow{\mathrm{CD}}$. Donc, si $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$, alors : $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}} = k\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{C'D'}}$. □

Le théorème IX.2.4 signifie que l'image d'un parallélogramme est un parallélogramme. C'est en fait une propriété importante des applications affines.

**THÉORÈME IX.2.5**
Les homothétie-translations de $\mathscr{W}$ de rapport $k$ multiplient les produits scalaires par $k^2$.

**Démonstration** Soit A, B, C et D quatre points de $\mathscr{W}$, E limage de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$ et $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$ leurs images respectives par une homothétie-translation, $f$, de rapport $k$. D'après les théorèmes IX.2.4 et V.1.2, on a : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$ ; donc : $\overrightarrow{A'E'} = \overrightarrow{C'D'}$ ; d'où :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'} &= \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'E'} \\
&= \frac{1}{2}\left(A'B'^2 + A'E'^2 - B'E'^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((|k|AB)^2 + (|k|AE)^2 - (|k|BE)^2\right) \\
&= k^2 \times \frac{1}{2}\left(AB^2 + AE^2 - BE^2\right) \\
&= k^2\, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} \\
&= k^2\, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}
\end{aligned}$$

□

**THÉORÈME IX.2.6**
Les homothétie-translations de $\mathscr{W}$ conservent les angles géométriques.

**Démonstration** Soit A, B, C (où B et C sont distincts de A) trois points de $\mathscr{W}$ et $A'$, $B'$, $C'$ leurs images respectives par une homothétie-translation, $f$, de rapport $k$. Un angle géométrique est déterminé par son cosinus, donc pour démontrer que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$ sont égaux, il suffit de démontrer qu'ils ont le même cosinus. Or : $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \cos\widehat{B'A'C'} \times A'B' \times A'C'$ ; donc :

$$\cos\widehat{B'A'C'} = \frac{\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}}{A'B' \times A'C'} = \frac{k\overrightarrow{AB} \cdot k\overrightarrow{AC}}{|k| \times AB \times |k| \times AC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \cos\widehat{BAC}.$$

□

**THÉORÈME IX.2.7**
Les homothétie-translations de $\mathscr{P}$ conservent les angles orientés.

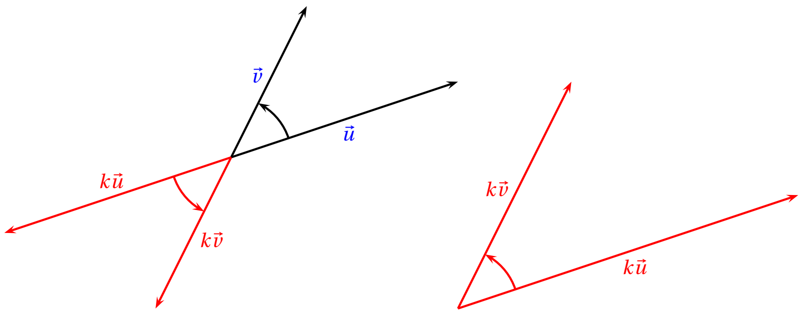
**Démonstration** Soit A, B, C et D quatre points de $\mathscr{P}$, et $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ leurs images respectives par une homothétie-translation, $f$, de rapport $k$.

**Si $k > 0$** D'après le théorème III.3.6 :

$$\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(k\overrightarrow{AB}, k\overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right).$$

**Si $k < 0$** D'après le théorème III.3.6 et le relation de Chasles :

$$\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) \equiv \left(k\overrightarrow{AB}, k\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(-\overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(-\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, -\overrightarrow{AC}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \pi \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \pmod{2\pi}.$$




□

***Remarque*** *La notion d'angle orienté de deux vecteurs n'est pas extensible à l'espace, il serait donc insensé de vouloir étendre à l'espace le théorème IX.2.7.*

Nous avons défini en III.3.1 l'orientation du plan. Nous en avons déduit une partition de l'ensemble des repères du plan en deux classes : la classe des repères orientés dans le sens direct et la classe des repères orientés dans le sens indirect.
On dira que deux repères orthonormés de l'espace sont orientés dans le même sens lorsque l'un sera image de l'autre par une translation, une rotation ou la composée d'une translation et d'une rotation. Nous admettons que cette relation partage l'ensemble des repères orthonormés de l'espace en deux classes. Orienté l'espace, c'est choisir l'une de ces deux classes comme classes des repères orthonormés directs. Par convention internationale, l'espace est orienté par la « règle des trois doigts de la main droite » : Le repère formé par les trois premiers doigts (dans l'ordre : pouce ; index ; majeur) de la main droite est orienté dans le sens direct. Le repère formé de la même façon, mais avec la main gauche, est orienté dans le sens indirect.

**DÉFINITIONS IX.2.2**

**(1)** Une transformation de $\mathscr{W}$ qui conserve l'orientation est une transformation par laquelle l'image d'un repère est un repère orienté dans le même sens.

**(2)** Une transformation de $\mathscr{W}$ qui renverse l'orientation est une transformation par laquelle l'image d'un repère est un repère orienté dans l'autre sens.

**THÉORÈME IX.2.8**

**(1)** Les homothétie-translations de $\mathscr{P}$ conservent l'orientation.

**(2)** Les homothétie-translations de $\mathscr{E}$ de rapport positif conservent l'orientation.

**(3)** Les homothétie-translations de $\mathscr{E}$ de rapport négatif renversent l'orientation.

**Démonstration** **(1)** est une conséquence immédiate du théorème IX.2.7. Nous admettons les propriétés **(2)** et **(3)**. □

## IX.3 Image de configurations

**THÉORÈME IX.3.1**

Par une homothétie-translation de $\mathscr{W}$ :

**(1)** L'image d'une droite (AB) est la droite $(\mathrm{A'B'})$ qui est parallèle (AB).

**(2)** L'image d'une demi-droite [AB) est la demi-droite $[\mathrm{A'B'})$.

**(3)** L'image d'un segment [AB] est le segment $[\mathrm{A'B'}]$.

**(4)** L'image d'un plan (ABC) est le plan $(\mathrm{A'B'C'})$ qui est parallèle (ABC).

**Démonstration** Soit M un point de $\mathscr{W}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in (\mathrm{AB}) &\iff \exists x \in \mathbb{R}, \overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&\iff \exists x \in \mathbb{R}, \mathrm{M} = \mathrm{bar}\left\{(\mathrm{A}, 1-x), (\mathrm{B}, x)\right\} \\
&\iff \exists x \in \mathbb{R}, \mathrm{M'} = \mathrm{bar}\left\{(\mathrm{A'}, 1-x), (\mathrm{B'}, x)\right\} \quad \text{(c'est la conservation du barycentre)} \\
&\iff \exists x \in \mathbb{R}, \overrightarrow{\mathrm{A'M'}} = x\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} \\
&\iff \mathrm{M'} \in (\mathrm{A'B'})
\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ dirigent respectivement les droites (AB) et $(\mathrm{A'B'})$ et son colinéaires, donc : $(\mathrm{AB}) \parallel (\mathrm{A'B'})$.
On démontre de même **(2)** et **(3)** en remplaçant successivement $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^+$, puis par $[0;1]$. Démontrons **(4)** :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in (\mathrm{ABC}) &\iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&\iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{M} = \mathrm{bar}\left\{(\mathrm{A}, 1-x-y), (\mathrm{B}, x), (\mathrm{C}, y)\right\} \\
&\iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{M'} = \mathrm{bar}\left\{(\mathrm{A'}, 1-x), (\mathrm{B'}, x), (\mathrm{C'}, y)\right\} \quad \text{(c'est la conservation du barycentre)} \\
&\iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{\mathrm{A'M'}} = x\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} + y\overrightarrow{\mathrm{A'C'}} \\
&\iff \mathrm{M'} \in (\mathrm{A'B'C'})
\end{aligned}$$

Les droites (AB) et (AC) sont deux droites sécantes de (ABC) respectivement parallèles aux droites $(\mathrm{A'B'})$ et $(\mathrm{A'C'})$ qui sont deux droites sécantes de $(\mathrm{A'B'C'})$, donc les plans (ABC) et $(\mathrm{A'B'C'})$ sont parallèles. □

**THÉORÈME IX.3.2**

**(1)** Par une homothétie-translation de $\mathscr{P}$, l'image d'un cercle de centre I et de rayon R est le cercle de centre I′ et de rayon $|k|\mathrm{R}$.

**(2)** Par une homothétie-translation de $\mathscr{E}$, l'image d'une sphère de centre I et de rayon R est la sphère de centre I′ et de rayon $|k|\mathrm{R}$.

**Démonstration** Les deux propriétés se démontrent de la même façon, elles se déduisent de l'équivalence :

$$\mathrm{IM} = \mathrm{R} \iff \mathrm{I'M'} = |k|\mathrm{R}.$$

□

Si $(d_1)$ et $(d_2)$ sont deux droites parallèles, alors leurs images par une homothétie-translation vérifient, d'après le théorème IX.3.1 : $(d'_1) \parallel (d_1) \parallel (d_2) \parallel (d'_2)$ ; ce qui établit la propriété **(1)** du théorème suivant dont la démonstration des propriétés **(2)** et **(3)** est laissée au soin du lecteur.

**THÉORÈME IX.3.3**

**(1)** Par une homothétie-translation de $\mathscr{W}$, les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

**(2)** Par une homothétie-translation de $\mathscr{E}$, les images de deux plans parallèles sont deux plans parallèles.

**(3)** Par une homothétie-translation de $\mathscr{E}$, les images d'une droite et d'un plan parallèles sont une droite et un plan parallèles.

On dit que les homothétie-translations conservent le parallélisme.

Nous admettons le théorème suivant.

**THÉORÈME IX.3.4**

**(1)** Par une homothétie-translation de $\mathscr{W}$, les images de deux droites orthogonales sont deux droites orthogonales.

**(2)** Par une homothétie-translation de $\mathscr{E}$, les images de deux plans perpendiculaires sont deux plans perpendiculaires.

**(3)** Par une homothétie-translation de $\mathscr{E}$, les images d'une droite et d'un plan perpendiculaires sont une droite et un plan perpendiculaires.

On dit que les homothétie-translations conservent l'orthogonalité.

Les homothétie-translations conservent les angles géométriques et multiplient les longueurs par $|k|$, nous en déduisons le théorème suivant.

**THÉORÈME IX.3.5**

**(1)** Par une homothétie-translation de rapport $k$ de $\mathscr{W}$, deux triangles ABC et A′B′C′ images l'un de l'autre sont semblables et : $\text{aire}\left(\mathrm{A'B'C'}\right) = k^2\,\text{aire}\,(\mathrm{ABC})$.

**(2)** Par une homothétie-translation de rapport $k$ de $\mathscr{E}$, deux tétraèdres ABCD et A′B′C′D′ images l'un de l'autre sont semblables et : $\text{volume}\left(\mathrm{A'B'C'D'}\right) = |k|^3\,\text{volume}\,(\mathrm{ABCD})$.

D'après ce théorème, les homothétie-translations de rapport $k$ multiplient les aires des triangles par $k^2$ et les volumes des tétraèdres par $|k|^3$. Plus généralement une région plane polygonale peut être découpée en triangles et dans l'espace, une région polyédrique peut être découpée en tétraèdres ce qui étend le théorème ci-dessus.
Plus généralement nous admettons le théorème suivant.

**THÉORÈME IX.3.6**

**(1)** Les homothétie-translations de rapport $k$ de $\mathscr{W}$, multiplient les aires par $k^2$.

**(2)** Les homothétie-translations de rapport $k$ de $\mathscr{E}$, multiplient les volumes par $|k|^3$.

Lorsque deux ensembles ont un point d'intersection, le contact entre ces deux ensembles en ce point est la nature de leur intersection en ce point (sécante ou tangente). Nous admettons le théorème suivant.

**THÉORÈME IX.3.7**

Les homothétie-translations de $\mathscr{W}$, conservent le contact.

Ce théorème signifie, par exemple, que les images d'un cercle et d'une tangente sont un cercle et une tangente.

# Index

accroissement moyen, 59
angle
  géométrique, 41
  orienté, 41
approximation, 61
  par défaut, 61
  par excès, 61
arrondi décimal, 61

barycentre, 83
Bernoulli (inégalité de), 70
borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$, 11, 87
borne inférieure d'une suite, 88
borne supérieur d'une partie de $\mathbb{R}$, 11, 87
borne supérieur d'une suite, 88

carré scalaire, 72
centre de symétrie d'une courbe, 17
cercle
  trigonométrique, 42
composée
  d'une suite par une fonction, 88
coordonnées
  cartésiennes, 39
  polaires, 51
  rectangulaires, 39

dérivée, 63
discriminant, 28

écart type, 110
ensemble de dérivabilité, 63
équation
  cartésienne, 77
erreur, 61
espérance mathématique, 110
événement(s), 105
  élémentaire, 105
  certain, 105
  impossible, 105
éventualité, 105

fonction
  associée, 21
  composée, 8
  croissante, 9
  décroissante, 9
  impaire, 12
  périodique, 13
  paire, 12
  strictement
    croissante, 9
    décroissante, 9
    monotone, 9

homothétie, 113
homothétie-translation, 115

incertitude, 61
isobarycentre, 83
issue, voir éventualité

König(formule de), 111

loi de probabilité, 108

majorant d'une partie de $\mathbb{R}$, 11, 87
mesure(s)
  d'un angle orienté, 44
  principale, 45
minorant d'une partie de $\mathbb{R}$, 11, 87
moyenne
  arithmétique, 93
  géométrique, 95

nombre dérivé, 62

point pondéré, 81
points critiques, 68
première bissectrice, 89
probabilité(s), 106

radian, 39

suite
  arithmético-géométrique, 96
  arithmétique, 92
  bornée, 89
  constante, 90
  convergente, 98
  croissante, 90
  décroissante, 90
  divergente, 98
  géométrique, 94
  majorée, 89
  minorée, 89
  monotone, 90
  numérique, 88
  stationnaire, 90
système de points pondérés, 81

taux de variation, 59
théorème

probabilités totales (des)
faible, 107
translation, 113

univers, **105**
univers image, 108

variable(s) aléatoire(s), 108
variance, 110
vecteur
normal, 76
unitaire, 40